Geometria 1 a.a. 2016/17
Esercizi 2

(1) Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita dotato di prodotto scalare e sia $\varphi\colon V \to V$ una isometria (non necessariamente lineare) tale che $\varphi(0) = 0$. Dimostrare che φ conserva la norma dei vettori.

(2) Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita dotato di prodotto scalare e sia $\varphi\colon V \to V$ una isometria (non necessariamente lineare) tale che $\varphi(0) = 0$. Dimostrare che φ conserva il prodotto scalare tra vettori (*Suggerimento: calcolare* $\|\varphi(v) - \varphi(w)\|^2$).

(3) Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita dotato di prodotto scalare e sia $\varphi\colon V \to V$ una isometria (non necessariamente lineare) tale che $\varphi(0) = 0$. Dimostrare che φ manda basi ortonormali in basi ortonormali.

(4) Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita dotato di prodotto scalare e sia $\varphi\colon V \to V$ una isometria tale che $\varphi(0) = 0$. Dimostrare che φ è lineare (*Suggerimento: sia* $\{e_i\}$ *una base ortonormale di* V*; dimostrare che, se* $v = v^i e_i$*, allora* $\varphi(v) = v^i \varphi(e_i)$).

(5) Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita e siano $\varphi\colon V \to V$ un'isomorfismo lineare e $W \subseteq V$ un sottospazio tale che $\varphi\big|_W\colon W \to W$. Dimostrare che φ^{-1} manda W in W. Mostrare con un controesempio che questo non è necessariamente vero se V ha dimensione infinita.

(6) Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita dotato di prodotto scalare e sia W un sottospazio di V. Indichiamo con π_W e $\pi_{W^\perp}$ le proiezioni ortogonali su W e su $W^\perp$, rispettivamente, e sia S_W la riflessione rispetto a W. Dimostrare che $S_W = \mathrm{Id}_V - 2\pi_{W^\perp}$

(7) In $\mathbb{R}^3$ dotato dell'usuale prodotto scalare, sia W il piano di equazione $ax + by + cz = 0$, con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Dimostrare che $W^\perp$ è la retta generata dal vettore (a, b, c) (*Suggerimento: doppio ortogonale*).

(8) In $\mathbb{R}^3$ dotato dell'usuale prodotto scalare, sia W il piano di equazione $2x + 3y - z = 0$. Determinare la matrice che rappresenta la riflessione S_W rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(9) Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita dotato di prodotto scalare e sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale di V. Dimostrare che un'applicazione lineare $\varphi\colon V \to V$ è la

riflessione rispetto a un sottospazio W di V se e solo se la matrice A che rappresenta φ nella base $\mathcal{B}$ è simmetrica e soddisfa $A^2 = \mathrm{Id}$.

(10) Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita dotato di prodotto scalare e siano v_1 e v_2 due vettori di V con $\|v_1\| = \|v_2\|$. Dimostrare che esiste un iperpiano W di V con $S_W(v_1) = v_2$.

(11) Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita dotato di prodotto scalare e siano $U \subseteq V$ un sottospazio e v_1 e v_2 due vettori di $U^\perp$ con $\|v_1\| = \|v_2\|$. Dimostrare che esiste un iperpiano W di V con $U \subseteq W$ e $S_W(v_1) = v_2$.

(12) Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita dotato di prodotto scalare e siano $\varphi\colon V \to V$ una isometria lineare e v un vettore di V. Dimostrare che esiste un iperpiano W di V con $(S_W \circ \varphi)(v) = v$.

(13) Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita dotato di prodotto scalare e siano $U \subseteq V$ un sottospazio e $\varphi\colon V \to V$ una isometria lineare tale che $\varphi\big|_U = \mathrm{id}_U\colon U \to U$. Siano infine v un vettore di $U^\perp$ e $Z \subseteq V$ il sottospazio generato da U e v. Dimostrare che esiste un iperpiano W di V con $(S_W \circ \varphi)\big|_Z = \mathrm{id}_Z\colon Z \to Z$.

(14) In $\mathbb{R}^3$ dotato dell'usuale prodotto scalare, siano W_1 e W_2 i piani di equazione $2x+3y-z=0$ e $x+y-2z=0$, rispettivamente. Siano S_{W_1} e S_{W_2} le riflessioni corrispondenti e sia φ l'elemento di $SO(3)$ dato da $\varphi = S_{W_1} \circ S_{W_2}$. Determinare l'asse di rotazione di φ (*Suggerimento: l'asse di rotazione viene lasciato fisso...*)