Geometria 1 a.a. 2016/17
Esercizi 4

Esercizi di preparazione al primo esonero: se sapete fare questi sapete fare quelli dell'esonero. Su questi esercizi, proprio perché di preparazione all'esonero non verranno dati suggerimenti né qui nel testo né durante eventuali ricevimenti: avete una settimana per pensarci (o per sequestrare qualche studente o studentessa del corso che abbiate fondate ragioni di sospettare sappia risolverli e convincerli con le buone o le cattive a rivelarvi la soluzione)

(1) Sia V lo spazio vettoriale reale delle matrici 2×2 della forma

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

Si consideri l'applicazione $Q\colon V \to \mathbb{R}$ definita da $Q(A) = \mathrm{tr}(A^2)$.

- dimostrare che Q è una forma quadratica;
- determinare rango e segnatura di Q;
- determinare una base Q-ortogonale di V.

(2) In $\mathbb{C}^2$ dotato del prodotto Hermitiano standard, si consideri il sottospazio vettoriale W definito da

$$W = \{\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \text{ tali che } (1+i)z + (1-2i)w = 0\}$$

Scrivere la matrice che rappresenta la proiezione ortogonale π_W rispetto alla base canonica di $\mathbb{C}^2$.

(3) In $\mathbb{R}^3$ dotato dell'usuale prodotto scalare si consideri l'applicazione lineare $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rappresentata, rispetto alla base canonica, dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3/7 & -2/7 & -6/7 \\ 6/7 & 3/7 & 2/7 \\ 2/7 & -6/7 & 3/7 \end{pmatrix}$$

- dimostrare che φ è un elemento di $SO(3)$;
- determinare due piani V e W di $\mathbb{R}^3$ tali che, dette S_V e S_W le riflessioni rispetto a V e W rispettivamente, si abbia $\varphi = S_V \circ S_W$.