Geometria 1 a.a. 2016/17
Esercizi 6

(1) In $(\mathbb{R}, \tau_{Eucl})$ si consideri il sottoinsieme Y definito da

$$Y = \left\{ \frac{1}{n} \quad \text{al variare di } n \in \mathbb{N} \right\}$$

Determinare parte interna, chiusura e frontiera di Y in $\mathbb{R}$.

(2) Sia $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ un'applicazione continua e sia $Z \subseteq X$ un sottoinsieme. Dimostrare che

$$f\Big|_Z : (Z, i^*\tau_X) \to (Y, \tau_Y)$$

è continua.

(3) Si considerino il sottospazio $[0, 2\pi)$ di $\mathbb{R}$ ed il sottospazio $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tali che } x^2 + y^2 = 1\}$ di $\mathbb{R}^2$, entrambi con la topologia indotta dalla topologia euclidea dell'ambiente. Sia

$$f\colon ([0, \pi), i^*\tau_{Eucl}) \to (S^1, i^*\tau_{Eucl})$$

l'applicazione data da $f(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$. Dimostrare che f è continua e biiettiva. L'applicazione f è anche un omeomorfismo?

(4) Sia $X = \{x, y\}$ un insieme costituito da due elementi, e sia τ la seguente collezione di sottoinsiemi di X:

$$\emptyset; \qquad \{x\}; \qquad X.$$

- dimostrare che τ è una topologia su X;
- (X, τ) è connesso?
- (X, τ) è compatto?
- (X, τ) è di Hausdorff? (T2?)
- la topologia τ può essere indotta da una metrica su X?

(5) Su $\mathbb{R}^n$ si consideri la topologia euclidea τ_{Eucl}. Consideriamo la relazione di equivalenza su $\mathbb{R}^n$ indotta dall'azione di moltiplicazione a sinistra del gruppo $GL(n; \mathbb{R})$, ovvero delle matrici $n \times n$ invertibili:

$$\vec{x} \simeq \vec{y} \quad \Leftrightarrow \exists A \in GL(n; \mathbb{R}) \text{ tale che } A\vec{x} = \vec{y}.$$

Sull'insieme quoziente $\mathbb{R}^n / GL(n; \mathbb{R})$ si consideri la toplogia quoziente $\pi_*\tau_{Eucl}$, dove $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n / GL(n; \mathbb{R})$ è la proiezione al quoziente. Dove si è già incontrato lo spazio topologico $(\mathbb{R}^n / GL(n; \mathbb{R}), \pi_*\tau_{Eucl})$?

(6) Ricordiamo che, come insieme, lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è il quoziente

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \left(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}\right) / \mathbb{R}^*.$$

Indichiamo con $\pi\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ la proiezione al quoziente, e consideriamo su $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ la topologia quoziente $\pi_* i^*\tau_{Eucl}$, dove $i^*\tau_{Eucl}$ è la topologia di sottospazio su $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.

- $(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}), \pi_*\tau_{Eucl})$ è connesso?
- $(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}), \pi_*\tau_{Eucl})$ è compatto? (*suggerimento:* cercare un sottoinsieme compatto K di $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ tale che $\pi|_K\colon K \to (\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ sia suriettiva).

(7) Sia $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ il sottoinsieme

$$S^n = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \quad \text{tali che } \|\vec{x}\|^2 = 1\}$$

dove $\|\ \|$ è l'usuale norma euclidea. Su S^n si consideri la relazione di equivalenza indotta dalla moltiplicazione per gli elementi del gruppo moltiplicativo $\{1, -1\}$, cioè

$$\vec{x} \simeq \vec{y} \quad \Leftrightarrow x = \pm y.$$

Sia $\pi\colon S^n \to S^n/\{\pm 1\}$ la proiezione al quoziente e sia $\pi_* i^* \tau_{Eucl}$ la topologia quoziente (dove $i^*\tau_{Eucl}$ è la topologia di sottospazio su $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$). Dimostrare che $(S^n/\{\pm 1\}, \pi_* i^* \tau_{Eucl})$ è omeomorfo a $(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}), \pi_* i^* \tau_{Eucl})$.

(8) Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $\pi\colon X \to Y$ un'applicazione suriettiva di insiemi. Consideriamo su Y la topologia quoziente $\pi_*\tau$. Dimostrare che un sottoinsieme F di Y è chiuso in $(Y, \pi_*\tau)$ se e solo se $\pi^{-1}(F)$ è chuso in (X, τ).

(9) Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $\pi\colon X \to Y$ un'applicazione suriettiva di insiemi. Consideriamo l'applicazione

$$(\pi, \pi)\colon X \times X \to Y \times Y$$

Dimostrare che, se $\pi\colon (X, \tau) \to (Y, \pi_*\tau)$ è aperta,[1] allora la topologia quoziente $(\pi, \pi)_*(\tau \times \tau)$ coincide con la topologia prodotto delle topologie quoziente $\pi_*\tau \times \pi_*\tau$. (*suggerimento:* dimostrare che la base standard della topologia prodotto è una base della topologia quoziente).

(10) Diremo che un gruppo G agisce su uno spazio topologico (X, τ) mediante applicazioni continue se per ogni elemnto g di G è assegnata un'applicazione continua $\rho_g\colon (X, \tau) \to (X, \tau)$ in modo tale che si abbia
- $\rho_e = \mathrm{id}_X$, dove e è l'elemento neutro di G;
- $\rho_{gh} = \rho_g \circ \rho_h$ per ogni $g, h \in G$.

Dimostrare che se G agisce su (X, τ) mediante applicazioni continue le applicazioni ρ_g sono tutte omeomorfismi.

(11) Supponiamo che il gruppo Gagisca sullo spazio topologico (X, τ) mediante applicazioni continue. Sull'insieme X consideriamo la relazione di equivalenza $x \sim y$ se e solo se esiste $g \in G$ tale che $y = \rho_g(x)$, e indichiamo con X/G l'insieme quoziente e con $\pi\colon X \to X/G$ la proiezione al quoziente. Dimostrare che l'applicazione $\pi\colon (X, \tau) \to (X/G, \pi_*\tau)$ è aperta.

(12) Sia (X, τ) lo spazio topologico dato dall'insieme $X = \{0, 1, 2\}$ con la topologia τ costituita dai sottoinsiemi

$$\emptyset, \qquad \{0\}, \qquad \{0, 1\}, \qquad X.$$

Sia Y l'insieme $Y = \{0, 1\}$ e sia $f\colon X \to Y$ l'applicazione suriettiva data da

$$f(0) = 0; \qquad f(1) = 1; \qquad f(2) = 0.$$

Dimostrare che l'applicazione $f\colon (X, \tau) \to (Y, f_*\tau)$ non è aperta.

(13) Dimostrare che $(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}), \pi_* i^* \tau_{Eucl})$ è T2. (*suggerimento:* dimostrare che la diagonale è chiusa nel prodotto).

[1]Senza questa ipotesi l'enunciato è in generale falso. Esibire un controesempio, tuttavia, non è affatto semplice: si veda James Munkres, *Topology*, Sezione 22, Esercizo 6.

(14) Su $\mathbb{R}$ dotato della topologia euclidea si consideri la relazione di equivalenza indotta dalla moltiplicazione per gli elementi del gruppo moltiplicativo $\{1, -1\}$, cioè

$$\vec{x} \simeq \vec{y} \quad \Leftrightarrow x = \pm y.$$

Sia $\pi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\{\pm 1\}$ la proiezione al quoziente. Dimostrare che $(\mathbb{R}/\{\pm 1\}, \pi_* \tau_{Eucl})$ è omeomorfo a $([0, +\infty), i^* \tau_{Eucl})$.

(15) Sul sottoinsieme $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ si consideri la topologia di sottospazio indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}$. Dimostrare che la topologia $\imath^* \tau_{Eucl}$ su $\mathbb{Z}$ coincide con la topologia discreta.

(16) Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $Y \subseteq X$ un sottoinsieme. Supponiamo che $(Y, i^*\tau)$ sia uno spazio connesso (dove $i^*\tau$ indica la topologia di sottospazio). Dimostrare che $\overline{Y}$ (la chiusura di Y in X) è un sottospazio conesso di X.

(17) Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $Y \subseteq X$ un sottoinsieme. Infine sia Z un sottoinsieme di X con $Y \subseteq Z \subseteq \overline{Y}$. Supponiamo che $(Y, i^*\tau)$ sia uno spazio connesso. Dimostrare che $(Z, i^*\tau)$ è connesso.

(18) Sia (X, τ) uno spazio topologico e siano x_0 e x_1 punti di X. Un *arco* in X da x_0 ad x_1 è un'applicazione continua

$$\alpha \colon [0, 1] \to X$$

tale che $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = x_1$. Dimostrare che se esistono un arco α da x_0 a x_1 ed un arco β da x_1 ad x_2 allora esiste anche un arco γ da x_0 a x_2.

(19) Uno spazio topologico (X, τ) si dice *connesso per archi* se presi comunque x_0 e x_1 in X esiste un arco α da x_0 ad x_1. Dimostrare che (X, τ) è connesso per archi se e solo se esiste un punto $\overline{x}$ in X tale che, per ogni altro punto x di X esiste un arco da $\overline{x}$ a x.

(20) Dimostrare che uno spazio connesso per archi è connesso (*suggerimento:* $[0, 1]$ è connesso).

(21) Dimostrare che $\mathbb{R}^n$ è connesso per archi.

(22) Dimostrare che l'immagine di uno spazio connesso per archi è connessa per archi.

(23) Dimostrare che il sottospazio $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tali che } x^2 + y^2 = 1\}$ è connesso per archi.

(24) Dimostrare che il sottospazio $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tali che } x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ è connesso per archi (*suggerimento:* dati due punti p e q di S^2, considerare il piano per l'origine contenente p e q)

(25) Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $Y \subseteq X$ un sottoinsieme, dotato della topologia di sottospazio. Supponiamo che $(Y, i^*\tau)$ sia connesso per archi e che per ogni punto x di X esista un arco α con $\alpha(0) = x$ e $\alpha(1) \in Y$. Dimostrare che X è connesso per archi.

(26) Dimostrare che $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ è connesso per archi.

(27) Dimostrare che se (X, τ_X) e (Y, τ_Y) sono connessi per archi allora $(X \times Y, \tau_{prod})$ è connesso per archi.

(28) Uno spazio topologico (X, τ) si dice *localmente connesso per archi* se per ogni punto x di X e per ogni intorno I di x in X esiste un intorno J di x in X con $x \in J \subseteq I$ e J connesso per archi (nella topologia di sottospazio). Dimsotrare che un aperto di $\mathbb{R}^n$ è localmente connesso per archi.

(29) Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $Y \subseteq X$ un sottoinsieme. Dimostrare che un punto x di X appartiene a $\overline{Y}$ (la chiusura di Y in X) se e solo se per ogni I intorno di x in X si ha $I \cap Y \neq \emptyset$.

(30) Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $Y \subseteq X$ un sottoinsieme. Dimostrare che un punto x di X appartiene a ∂Y (la frontiera di Y in X) se e solo se per ogni I intorno di x in X si ha $I \cap Y \neq \emptyset$ e $I \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset$.

(31) Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $Y \subseteq X$ un sottoinsieme. Dimostrare che Y è chiuso se e solo se $\partial Y \subseteq Y$.

(32) Sia (X, τ) uno spazio topologico localmente connesso per archi e sia $x \in X$. Dimostrare che il sottoinsieme

$$U_x = \{y \in X \text{ tali che esista un arco in } X \text{ da } x \text{ a } y\}$$

è aperto e chiuso in X.

(33) Sia (X, τ) uno spazio topologico connesso e localmente connesso per archi. Dimostrare che (X, τ) è connesso per archi.

(34) In $(\mathbb{R}^n, \tau_{Eucl})$ si consideri il sottoinsieme

$$B_1(\mathbf{0}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \quad \text{tali che } \|\vec{x}\|^2 < 1\},$$

dove $\| \ \|$ è l'usuale norma euclidea. Dimostrare che

$$\overline{B_1(\mathbf{0})} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \quad \text{tali che } \|\vec{x}\|^2 \leq 1\}$$

(35) Uno spazio topologico (X, τ) si dice *localmente compatto* se per ogni punto x di X e per ogni intorno I di x in X esiste un intorno J di x in X con $x \in J \subseteq I$ e J compatto (nella topologia di sottospazio). Dimsotrare che un aperto di $\mathbb{R}^n$ è localmente compatto.

(36) Si consideri su $\mathbb{R}$ la topologia Euclidea τ_{Eucl} e sia $Y \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme limitato. Dimostrare che $\inf(Y)$ e $\sup(Y)$ appartengono a ∂Y (la frontiera di Y in $\mathbb{R}$). Dedurne che se Y è anche chiuso allora $\inf(Y)$ e $\sup(Y)$ appartengono ad Y.

(37) Sia (X, τ) uno spazio topologico compatto e sia $f\colon (X, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau_{Eucl})$ una funzione continua. Dimostrare che f ha massimo e minimo.

(38) Esibire un omoemorfismo tra $(\mathbb{R}, \tau_{Eucl})$ e $((0,1), \tau_{Eucl})$.

(39) Esibire un omoemorfismo tra $([0, +\infty), \tau_{Eucl})$ e $([0,1), \tau_{Eucl})$.

(40) Dimostrare che $([0,1], \tau_{Eucl})$ e $((0,1), \tau_{Eucl})$ non sono omeomorfi.

(41) Sia $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ un omeomorfismo e sia x un punto di X. Dimostrare che la restrizione di f a $X \setminus \{x\}$,

$$f\Big|_{X\setminus\{x\}} : X \setminus \{x\} \to Y \setminus \{f(x)\}$$

è ancora un omeomorfismo.

(42) Dimostrare che $([0, 1), \tau_{Eucl})$ e $((0, 1), \tau_{Eucl})$ non sono omeomorfi (*suggerimento:* utilizzare l'esercizio precedente; dove va il punto 0?)

(43) Dimostrare che $(\mathbb{R}, \tau_{Eucl})$ e $(\mathbb{R}^2, \tau_{Eucl})$ non sono omeomorfi.

(44) Sia $f\colon (\mathbb{R}^n, \tau_{Eucl}) \to (\mathbb{R}^n, \tau_{Eucl})$ un omeomorfismo, e sia $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme limitato. Dimostrare che $f(Y)$ è limitato.

(45) Sia $f\colon (\mathbb{R}^n, \tau_{Eucl}) \to (\mathbb{R}^n, \tau_{Eucl})$ un omeomorfismo, e sia $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme illimitato. Dimostrare che $f(Y)$ è illimitato.

(46) Sia $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ un omeomorfismo e sia $Z \subseteq X$ un sottoinsieme. Dimostrare che

$$f\Big|_{Z} : (Z, i^*\tau_X) \to (f(Z), i^*\tau_Y)$$

è un omeomorfismo.

(47) Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme limitato. Si consideri su $\mathbb{R}$ la topologia euclidea. Dimostare che $(X, i^*\tau_{Eucl})$ è connesso e compatto se e solo se $X = [a, b]$ per opportuni a e b con $a \leq b$.

(48) Sia $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{Eucl}) \to (\mathbb{R}, \tau_{Eucl})$ un'applicazione continua, e sia $Z = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato. Dimostrare che in generale $f(\partial Z) \neq \partial f(Z)$.

(49) Sia $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ un'applicazione continua e biiettiva, e sia $Z \subset X$. Dimostrare che in generale $f(\partial Z) \neq \partial f(Z)$.

(50) Sia $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{Eucl}) \to (\mathbb{R}, \tau_{Eucl})$ un'applicazione continua e biiettiva, e sia $Z = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato. Dimostrare che $f(\partial Z) = \partial f(Z)$.

(51) Sia $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{Eucl}) \to (\mathbb{R}, \tau_{Eucl})$ un'applicazione continua e biiettiva, e sia $Z = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto e limitato. Dimostrare che $f(Z)$ è aperto.

(52) Sia $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ una funzione continua e sia $\mathcal{B}$ una base di τ_X. Dimostrare che f è aperta se e solo se $f(B)$ è aperto in Y per ogni $B \in \mathcal{B}$.

(53) Sia $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{Eucl}) \to (\mathbb{R}, \tau_{Eucl})$ un'applicazione continua e biiettiva. Dimostrare che f è un omeomorfismo.

Gli esercizi dell'esonero saranno molto simili a quelli di questa lista, ma saranno formulati in modo da avere una risposta chiusa. Ad esempio:

- Un'applicazione continua e biiettiva $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{Eucl}) \to (\mathbb{R}, \tau_{Eucl})$ è necessariamente un omeomorfismo? $\boxed{\text{sì}}$ $\boxed{\text{no}}$