Esercizi

1. Calcolare $H_\bullet(\mathbb{P}^n\mathbb{R}; A)$, per ogni $n \geq 0$, con $A = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{F}_2$.
2. Sia K la bottiglia di Klein. Calcolare $H_\bullet(K; A)$, con $A = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{F}_2$.
3. Calcolare $H_\bullet(S^2 \times \mathbb{P}^2\mathbb{R}; A)$, con $A = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{F}_2$.
4. Calcolare $H_\bullet(\mathbb{P}^2\mathbb{R} \times \mathbb{P}^2\mathbb{R}; A)$, con $A = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{F}_2$.
5. Siano $X = S^2 \times \mathbb{P}^3\mathbb{R}$ e $Y = S^3 \times \mathbb{P}^2\mathbb{R}$. Dimostrare che $\pi_i(X) \cong \pi_i(Y)$ per ogni $i \geq 0$, ma che X ed Y non sono omotopicamente equivalenti.
6. Siano $\simeq_{T^2}$ e $\simeq_{S^2}$ le relazioni di equivalenza standard sul bordo di $[0,1] \times [0,1]$ tali che $[0,1] \times [0,1]/\simeq_{T^2}$ sia omeomorfo a T^2 e $[0,1] \times [0,1]/\simeq_{S^2}$ sia omeomorfo a S^2. L'identità di $[0,1] \times [0,1]$ induce, per passaggio al quoziente, un'applicazione continua $f\colon T^2 \to S^2$. Dimostrare che $\pi_i(f)\colon \pi_i(T^2) \to \pi_i(S^2)$ è l'omomorfismo nullo per tutti gli $i \geq 0$, ma che f non è omotopa ad un'applicazione costante.
7. Calcolare $\pi_i(SU(n))$ per $0 \leq i \leq 3$ e per tutti gli $n \geq 1$.
8. Calcolare $\pi_i(U(n))$ per $0 \leq i \leq 3$ e per tutti gli $n \geq 1$.
9. Calcolare $H^\bullet(\mathbb{P}^n\mathbb{R}; A)$, come A-modulo graduato, per ogni $n \geq 0$, con $A = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{F}_2$.
10. Sia X un CW-complesso che sia un $K(\mathbb{Z}, 1)$. Dimostrare che X è omotopicamente equivalente a S^1. (*Suggerimento: sia $[\gamma]$ un generatore di $\pi_1(X, x_0)$; allora $[\gamma]$ è rappresentato da...*).
11. Dimostrare che $H^\bullet(K(\mathbb{Z}, 1), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^2)$ con $\deg(\alpha) = 1$.
12. Dimostrare che $H^\bullet(K(\mathbb{Z}, 1), \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[\alpha]$ con $\deg(\alpha) = 1$.
13. Dimostrare che $H^\bullet(K(\mathbb{Z}, 2), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\beta]$ con $\deg(\beta) = 2$.
14. Dimostrare che $H^\bullet(K(\mathbb{Z}, 2)\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[\beta]$ con $\deg(\beta) = 2$.
15. Dimostrare che $H^6(K(\mathbb{Z}, 3), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ e dedurne che S^3 non è un $K(\mathbb{Z}, 3)$.
16. Utilizzare le fibrazioni $U(n-1) \to U(n) \to S^{2n-1}$ e $SU(n-1) \to SU(n) \to S^{2n-1}$ per calcolare l'anello di coomologia di $U(n)$ ed $SU(n)$ a coefficienti interi.
17. Utilizzare la fibrazione $S^{2k-1} \to \mathrm{Grass}_{\mathbb{C}}(k-1, \infty) \to \mathrm{Grass}_{\mathbb{C}}(k, \infty)$ per dimostrare che $[S^5, \mathrm{Grass}_{\mathbb{C}}(2, \infty)] \cong \pi_4(S^3)$ (si può poi dimostrare, ma non ne abbiamo i mezzi, che $\pi_4(S^3) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, dal che si ricava che $[S^5, \mathrm{Grass}_{\mathbb{C}}(2, \infty)]$ è costituito esattamente da due elementi).

18. Sia X un CW complesso connesso e semplicemente connesso di dimensione n (ovvero senza k-celle per $k > n$), e sia $\{X_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ la sua torre di Postnikov. Dimostrare che l'applicazione $f_n\colon X \to X_n$ induce un isomorfismo in omologia $H_i(f_n)\colon H_i(X;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H_i(X_n;\mathbb{Z})$ per ogni i con $0 \leq i \leq n$.

19. Sia X un CW complesso connesso e semplicemente connesso di dimensione n, e sia $\{X_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ la sua torre di Postnikov. Dimostrare che l'applicazione $f_n\colon X \to X_n$ induce un'applicazione suriettiva in omologia $H_{n+1}(f_n)\colon H_{n+1}(X;\mathbb{Z}) \twoheadrightarrow H_{n+1}(X_n;\mathbb{Z})$. Dedurne che $H_{n+1}(X_n,\mathbb{Z}) = 0$.

20. Sia X un CW complesso connesso e semplicemente connesso di dimensione n, e sia $\{X_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ la sua torre di Postnikov. Dimostrare che

$$\pi_{n+1}(X) \cong H_{n+2}(X_n,\mathbb{Z}).$$

21. Sia X un CW complesso connesso e semplicemente connesso di dimensione n, e sia $\{X_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ la sua torre di Postnikov. Dimostrare che

$$\pi_{n+1+k}(X) \cong H_{n+2+k}(X_{n+k},\mathbb{Z})$$

per ogni $k \geq 0$.

22. Utilizzare la torre di Postnikov di S^2 per calcolare $\pi_3(S^2)$ e $\pi_4(S^2)$. (i gruppi di omologia necessari si possono ricavare dai gruppi di coomologia che abbiamo calcolato, mediante il teorema dei coefficienti universali)

23. Siano X ed Y spazi topologici omotopicamente equivalenti a CW complessi, connessi e semplicemente connessi, e sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua. Dimostrare che esiste ed è unica a meno di omotopia un'applicazione continua $f_{\mathbb{Q}}$ che rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} X_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "f_{\mathbb{Q}}"] & Y_{\mathbb{Q}} \\ X \arrow[u, "\varphi_X"] \arrow[r, "f"] & Y \arrow[u, "\varphi_Y"'] \end{tikzcd}$$

dove φ_X e φ_Y sono le mappe di razionalizzazione.

24. Due spazi topologici X ed Y (omotopicamente equivalenti a CW complessi, connessi e semplicemente connessi). Un'applicazione continua $f\colon X \to Y$ si dice equivalenza razionale tra X e Y se $f_{\mathbb{Q}}\colon X_{\mathbb{Q}} \to Y_{\mathbb{Q}}$ è un'equivalenza omotopica.[1] Dimostrare che le seguenti sono equivalenti:

    - $f_{\mathbb{Q}}$ è un'equivalenza omotopica;

[1] L'esistenza di un'equivalenza razionale tra X e Y è una relazione riflessiva e transitiva ma non è una simmetrica, quindi per ottenere la nozione di equivalenza razionale se ne fa la chiusura: due spazi X e Y si dicono razionalemnte eequivalenti se esiste uno zig-zag di equivalenze razionali $X \leftarrow Z_1 \to Z_2 \leftarrow \cdots \to Z_{n-1} \leftarrow Z_n \to Y$.

- $\pi_i(f) \otimes \mathrm{id} \colon \pi_i(X) \otimes \mathbb{Q} \to \pi_i(Y) \otimes \mathbb{Q}$ è un isomorfismo per ogni i;
- $H_i(f;\mathbb{Q}) \colon H_i(X;\mathbb{Q}) \to H_i(Y;\mathbb{Q})$ è un isomorfismo per ogni i.

25. Indichiamo con t_{2n} il generatore di $H^\bullet(K(\mathbb{Q};2n);\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[t_{2n}]$ e sia $\psi \colon K(\mathbb{Q},2n) \to K(\mathbb{Q},4n)$ l'applicazione continua (unica a meno di omotopia) corrispondente all'elemento $(t_{2n})^2$ in $H^{4n}(K(\mathbb{Q},2n);\mathbb{Q})$. In altre parole ψ è caratterizzata dalla condizione $\psi^* t_{4n} = (t_{2n})^2$, dove t_4 è il generatore di $H^\bullet(K(\mathbb{Q};4n);\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[t_{4n}]$. A meno di omotopia possiamo pensare a ψ come a una fibrazione. Sia E la fibra di ψ. Dimostrare che la coomologia di E a coefficienti razionali è
$$H^\bullet(E;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[t_{2n}]/((t_{2n})^2).$$

26. Dimostrare che le prime due classi di Chern definiscono un'equivalenza razionale
$$Grass_{\mathbb{C}}(2,\infty) \xrightarrow{\psi} K(\mathbb{Z},2) \times K(\mathbb{Z},4)$$
dove ψ è l'applicazione (unica a meno di omotopia) definita da $\psi^* t_2 = c_1$ e $\psi^* t_4 = c_2$ (qui t_2 e t_4 sono i generatori di $H^2(K(\mathbb{Z},2);\mathbb{Z})$ e $H^4(K(\mathbb{Z},4);\mathbb{Z})$, rispettivamente: dimostrare che $H^n(K(\mathbb{Z},n);\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, per ogni n)