Soluzione degli esercizi di algebra lineare (del 26 ottobre 2018)

Esercizio 1. Siano V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale con base $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ e W un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale con base $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_m)$, e sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare.
Chiamiamo $A = f_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ la matrice associata ad f rispetto alle basi $\mathcal{B}$ in partenza e $\mathcal{C}$ in arrivo. Dire se le seguenti affermazioni sono vere (fornendo, in tal caso, una dimostrazione) oppure false (fornendo, in tal caso, un controesempio).

(a) f è invertibile se e solo se esistono una matrice $N \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ tale che $NA = \mathrm{Id}_n$ ed una matrice $P \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ tale che $AP = \mathrm{Id}_m$.

Soluzione.

VERO.

Per definizione, f è invertibile se e solo se esiste $g : W \to V$ tale che $g \circ f = \mathrm{Id}_V$ e $f \circ g = \mathrm{Id}_W$. Inoltre, il passaggio alle coordinate rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ dà un isomorfismo lineare $\mathrm{Hom}(W, V) \to \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$.

Dunque, se f è invertibile, allora $N = P = g_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ soddisfano $NA = \mathrm{Id}_n$ e $AP = \mathrm{Id}_m$.

Viceversa, se esistono tali N, P, allora esistono uniche $g, h : W \to V$ tali che $g_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = N$ e $h_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = P$ ed esse soddisfano $g \circ f = \mathrm{Id}_V$ e $f \circ h = \mathrm{Id}_W$. La proprietà $g \circ f = \mathrm{Id}_V$ implica che f sia iniettiva, mentre $f \circ h = \mathrm{Id}_W$ implica che f sia suriettiva. Dunque f è biiettiva e quindi è un isomorfismo. Alternativamente, da $g \circ f = \mathrm{Id}_V$ e $f \circ h = \mathrm{Id}_W$ si può ricavare

$$g = g \circ \mathrm{Id}_W = g \circ f \circ h = \mathrm{Id}_V \circ h = h$$

e dunque $g = h$ da cui $g \circ f = \mathrm{Id}_V$ e $f \circ g = \mathrm{Id}_W$ e quindi f è un isomorfismo.

(b) f è invertibile se e solo se esiste una matrice $N \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ tale che $NA = \mathrm{Id}_n$.

Soluzione.

FALSO.

Come controesempio, possiamo considerare $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $f : V = \mathbb{R} \to W = \mathbb{R}^2$ definita come $f(x) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$. Rispetto alle basi canoniche in partenza e in arrivo abbiamo $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Se prendiamo $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$, otteniamo $NA = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Id}_1$. Tuttavia f non è suriettiva perché il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in W = \mathbb{R}^2$ non è contenuto in $\mathrm{Im}(f)$. In particolare, f non è un isomorfismo.

(c) f è invertibile se e solo se esiste una matrice $P \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ tale che $AP = \mathrm{Id}_m$.

Soluzione.

FALSO.

Come controesempio, possiamo considerare $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $f : V = \mathbb{R}^2 \to W = \mathbb{R}$ definita come $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \end{pmatrix}$. Rispetto alle basi canoniche in partenza e in arrivo abbiamo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$. Se prendiamo $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, otteniamo $AP = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Id}_1$. Tuttavia f non è iniettiva perché il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in V = \mathbb{R}^2$ è contenuto in $\ker(f)$. In particolare, f non è un isomorfismo.

(d) f è iniettiva se e solo se esiste una matrice $N \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ tale che $NA = \mathrm{Id}_n$.

Soluzione.

VERO.

Sia $g : W \to V$ è l'applicazione lineare corrispondente a $N = g^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$, allora $NA = \mathrm{Id}_n$ è equivalente a $g \circ f = \mathrm{Id}_V$.

Verifichiamo ora l'affermazione seguente. La conclusione seguirà prendendo $F = f$ e $G = g$.

Affermazione. *Se $F : X \to Y$ e $G : Y \to Z$ sono applicazioni di insiemi e se $G \circ F : X \to Z$ è iniettiva, allora F è iniettiva.*

Dimostrazione dell'affermazione. *Supponiamo $F(x_1) = F(x_2)$ per certi $x_1, x_2 \in X$. Allora $(G \circ F)(x_1) = G(F(x_1)) = G(F(x_2)) = (G \circ F)(x_2)$. Essendo $G \circ F$ iniettiva, questo implica $x_1 = x_2$. Dunque F è iniettiva.*

(e) f è suriettiva se e solo se esiste una matrice $N \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ tale che $NA = \mathrm{Id}_n$.

Soluzione.

FALSO.

Stesso controesempio del punto (b).

(f) f è iniettiva se e solo se esiste una matrice $P \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ tale che $AP = \mathrm{Id}_m$.

Soluzione.

FALSO.

Stesso controesempio del punto (c).

(g) f è suriettiva se e solo se esiste una matrice $P \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ tale che $AP = \mathrm{Id}_m$.

Soluzione.

VERO.

Se $h : W \to V$ è l'applicazione lineare corrispondente a $P = h^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$, allora $AP = \mathrm{Id}_m$ è equivalente a $f \circ h = \mathrm{Id}_W$.

Verifichiamo ora l'affermazione seguente. La conclusione seguirà prendendo $F = f$ e $H = h$.

Affermazione. *Se $H : X \to Y$ e $F : Y \to Z$ sono applicazioni di insiemi e se $F \circ H : X \to Z$ è suriettiva, allora F è suriettiva.*

Dimostrazione dell'affermazione. *Sia $z \in Z$. Per la suriettività di $F \circ H$, esiste $x \in X$ tale che $(F \circ H)(x) = z$. Questo vuol dire che $F(y) = z$ con $y = H(x)$. Dunque F è suriettiva.*

(h) f è invertibile se e solo se $m = n$ ed esiste una matrice $N \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ tale che $AN = NA = \mathrm{Id}_n$.

Soluzione.

VERO.

Essendo $m = n$, si ha che f è invertibile $\iff$ f è iniettiva $\iff$ f è suriettiva. Da questo concludiamo che f è invertibile $\iff$ esistono $N, P \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ tali che $AP = NA = \mathrm{Id}_n$. Inoltre l'invertibilità di f implica $P = (f^{-1})^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = N$ come nella soluzione ad (a).

(i) f è invertibile se e solo se $m = n$ ed esiste una matrice $N \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ tale che $NA = \mathrm{Id}_n$.

Soluzione.
VERO.
Essendo $m = n$, si ha che f è invertibile $\iff$ f è iniettiva. La conclusione segue da (d).

(j) f è invertibile se e solo se $m = n$ ed esiste una matrice $P \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ tale che $AP = \mathrm{Id}_n$.

Soluzione.
VERO.
Essendo $m = n$, si ha che f è invertibile $\iff$ f è suriettiva. La conclusione segue quindi da (g).

Esercizio 2. Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita. Dimostrare che $\{0\} \neq \ker f \neq V \iff$ esiste un'applicazione lineare $g : W \to V$ tale che $f \circ g = 0$ e $g \circ f \neq 0$.

Soluzione.
$\boxed{\Rightarrow}$ *Poiché* $\ker(f) \neq \{0\}$ *esiste* $v_0 \in \ker(f)$ *con* $v_0 \neq 0$. *Poiché* $\ker(f) \neq V$, *allora esiste* $v_1 \in V \setminus \ker(f)$. *Sia dunque* $w_1 = f(v_1) \in W$. *Notiamo che* $w_1 \neq 0$ *e dunque* (w_1) *è una collezione di vettori linearmente indipendenti di* W. *Completiamo* (w_1) *ad una base* $(w_1, \ldots, w_m)$ *di* W.
Definiamo $g : W \to V$ *come l'unica applicazione lineare tale che* $g(w_i) = v_0$ *per ogni* $i = 1, \ldots, m$. *In questo modo* $\mathrm{Im}(g) \subseteq \ker(f)$ *e dunque* $f(g(w)) = 0$ *per ogni* $w \in W$ *(ossia* $f \circ g = 0$*). D'altra parte,* $g(f(v_1)) = g(w_1) = v_0 \neq 0$ *e dunque* $g \circ f \neq 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ *Si verifica facilmente che* $\ker(f) \subseteq \ker(g \circ f)$ *e che* $\mathrm{Im}(g \circ f) \subseteq \mathrm{Im}(g)$.
La condizione $g \circ f \neq 0$ *ci dice che* $\ker(g \circ f) \neq V$ *(e dunque* $\ker(f) \neq V$*) e che* $\{0\} \neq \mathrm{Im}(g \circ f)$ *(e dunque* $\mathrm{Im}(g) \neq \{0\}$*). La condizione* $f \circ g = 0$ *è equivalente a* $\mathrm{Im}(g) \subseteq \ker(f)$. *Poiché* $\mathrm{Im}(g) \neq \{0\}$, *ne segue che* $\ker(f) \neq \{0\}$.

Esercizio 3. Siano $f, g : V \to W$ due applicazioni lineari tra spazi vettoriali di dimensione finita.

(a) Dimostrare che $\mathrm{Im}(f + g) \subseteq \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$.

Soluzione.
Sia $w \in \mathrm{Im}(f + g)$. *Allora esiste* $v \in V$ *tale che* $(f + g)(v) = w$, *ossia* $w = f(v) + g(v)$. *Poiché* $f(v) \in \mathrm{Im}(f)$ *e* $g(v) \in \mathrm{Im}(g)$, *ne segue che* $w \in \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$.

(b) Dedurre da (a) la disuguaglianza $\mathrm{rg}(f + g) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.

Soluzione.
È sempre vero che, se U, Z *sono spazi vettoriali di dimensione finita, allora* $\dim(U + Z) \leq \dim(U) + \dim(Z)$ *(segue anche dalla formula di Grassmann). Infatti, se* $(u_1, \ldots, u_k)$ *è una base di* U *e* $(z_1, \ldots, z_l)$ *è una base di* Z, *allora* $(u_1, \ldots, u_k, z_1, \ldots, z_l)$ *generano* $U + Z$ *e dunque* $\dim(U + Z) \leq k + l = \dim(U) + \dim(Z)$.

Poiché W *ha dimensione finita, allora* $\mathrm{Im}(f), \mathrm{Im}(g) \subseteq W$ *hanno dimensione finita. Prendendo* $U = \mathrm{Im}(f)$ *e* $Z = \mathrm{Im}(g)$, *dalla (a) segue dunque che* $\dim(\mathrm{Im}(f + g)) \leq \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(g))$, *che è la disuguaglianza voluta.*

(c) Trovare un esempio in cui $\mathrm{rg}(f+g) = 2$ e $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(g) = 1$.

Soluzione.
Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e siano $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \mathbb{R}^3$. Consideriamo $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definite come

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se (e_1, e_2, e_3) è la base canonica di $W = \mathbb{R}^3$, allora $\mathrm{Im}(f)$ ha base (e_1) e $\mathrm{Im}(g)$ ha base (e_2) e dunque $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Im}(g)) = 1$. Tuttavia $\mathrm{Im}(f+g)$ ha base (e_1, e_2) e dunque $\dim(\mathrm{Im}(f+g)) = 2$.

Esercizio 4. Date due applicazioni lineari $f : U \to V$ e $g : V \to W$ tra spazi vettoriali di dimensione finita, dimostrare che

$$\mathrm{rg}(g \circ f) \geq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - \dim V.$$

Soluzione.
Consideriamo la restrizione di f al $\ker(g \circ f)$, ossia $f\big|_{\ker(g\circ f)} : \ker(g \circ f) \to W$. Chiaramente $\ker(f\big|_{\ker(g\circ f)}) = \ker(f) \cap \ker(g \circ f)$. Notiamo che $\ker(f) \subseteq \ker(g \circ f) = \{v \in V \mid f(v) \in \ker(g)\}$. Dunque il nucleo di $f\big|_{\ker(g\circ f)}$ è ancora $\ker(f)$ e l'immagine di $f\big|_{\ker(g\circ f)}$ è contenuta nel $\ker(g)$.
Dal teorema del rango applicato a $f\big|_{\ker(g\circ f)}$ otteniamo

$$\begin{aligned} \dim\big(\ker(g \circ f)\big) &= \dim\big(\ker(f\big|_{\ker(g\circ f)})\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(f\big|_{\ker(g\circ f)})\big) = \\ &= \dim\big(\ker(f)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(f\big|_{\ker(g\circ f)})\big) \leq \dim\big(\ker(f)\big) + \dim\big(\ker(g)\big). \end{aligned}$$

Dal teorema del rango applicato a f, otteniamo $\mathrm{rg}(g \circ f) = \dim(V) - \dim\big(\ker(g \circ f)\big)$ ma anche $\mathrm{rg}(f) = \dim(V) - \dim\big(\ker(f)\big)$ e $\mathrm{rg}(g) = \dim(V) - \dim\big(\ker(g)\big)$.
Mettendo insieme queste quattro relazioni, otteniamo

$$\mathrm{rg}(g\circ f) = \dim(V) - \dim\big(\ker(g\circ f)\big) \geq \dim(V) - \dim\big(\ker(f)\big) - \dim\big(\ker(g)\big) = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - \dim(V).$$

Esercizio 5. Sia A una matrice $n \times n$ che commuta con tutte le matrici diagonali $n \times n$.
Dimostrare che A è diagonale.

Soluzione.
Sia D una matrice diagonale e, per ogni $k = 1, \dots, n$, sia λ_k l'elemento di posto (k, k) di D. Chiaramente $D^k_j = 0$ per $k \neq j$ perché D è diagonale.
Dalla regola per il prodotto di matrici AD otteniamo

$$(AD)^i_j = A^i_k D^k_j = A^i_j D^j_j = \lambda_j A^i_j.$$

Analogamente dalla regola per il prodotto DA di matrici otteniamo

$$(DA)^i_j = D^i_k A^k_j = D^i_i A^i_j = \lambda_i A^i_j.$$

Dunque $AD = DA$ per ogni matrice diagonale D se e solo se

$$\lambda_i A^i_j = \lambda_j A^i_j$$

per ogni coppia di indici i, j e per ogni scelta di $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, ovvero se e solo se

$$(\lambda_i - \lambda_j)A^i_j = 0$$

per ogni coppia di indici i, j e per ogni scelta di $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Questa equazione è automaticamente soddisfatta per $i = j$, quindi $AD = DA$ per ogni matrice diagonale D se e solo se

$$(\lambda_i - \lambda_j)A^i_j = 0$$

per ogni coppia di indici i, j con $i \neq j$ e per ogni scelta di $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Dato che la scelta di $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ è arbitararia, fissati i e j con $i \neq j$ possiamo sempre scegliere $\lambda_i \neq \lambda_j$ (ad esempio possiamo scegliere $\lambda_i = 1$ e $\lambda_j = 0$). Moltiplicando per l'inverso dell'elemento invertibile $\lambda_i - \lambda_j$ la codizione affinché $AD = DA$ per ogni matrice diagonale D diventa quindi

$$A^i_j = 0, \quad \textit{per ogni } i \neq j,$$

ovvero che A sia essa stessa diagonale.
Osservazione. *Il calcolo fatto sopra dimostra anche che, se A commuta con una qualche matrice diagonale D con tutti i λ_i distinti (ossia $\lambda_i \neq \lambda_j$ per ogni $i \neq j$), allora A è diagonale. (Osserviamo però che, se il campo $\mathbb{K}$ contiene meno di n elementi, allora una tale D non esiste.)*

Definizione. La collezione degli elementi $M_{i,i}$ di una matrice M quadrata si dice *diagonale principale di M*. Una matrice $D \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ si dice **diagonale** se è nulla al di fuori della sua diagonale principale, ossia se $D^i_j = 0$ per ogni $i \neq j$.

Esempio. Le matrici diagonali 2×2 sono tutte e sole le matrici del tipo $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$.

Definizione. Siano $f, g : V \to V$ applicazioni lineari. Diciamo che f, g **commutano** se $f \circ g = g \circ f$. Se $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ sono due matrici quadrate, diciamo che A, B **commutano** se $AB = BA$.

Esempio. Ogni matrice quadrata A commuta con se stessa.
Esempio. Le matrici $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ non commutano.