Esercizi di algebra lineare (13 novembre 2018)

Esercizio 1. Considerare l'applicazione lineare $L_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Calcolare il rango di L_A ed esibire una base di $\mathrm{Im}(L_A)$.

(b) Determinare equazioni cartesiane per $\mathrm{Im}(L_A)$.

Esercizio 2. Si consideri, al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$ la matrice

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & t \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Per quali valori di t la matrice $A(t)$ è invertibile?

(b) Per quei valori di t per i quali la matrice $A(t)$ è invertibile determinare $A(t)^{-1}$.

Esercizio 3. Sia A una matrice $m \times n$ e sia B_0 un minore invertibile $k \times k$ di A. Infine sia $r \geq k$. Dimostrare che $\mathrm{rg}(A) \geq r$ se e solo se esiste un minore invertibile B $r \times r$ di A contenente il minore B_0.

Esercizio 4. Siano $f\colon V \to W$ e $g\colon W \to Z$ applicazioni lineari tra spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$, e siano $f^*\colon W^* \to V^*$, $g^*\colon Z^* \to W^*$ e $(g \circ f)^*\colon Z^* \to V^*$ le loro duali. Dimostrare che $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ e dedurne che, se A è una matrice $m \times n$ e B una matrice $n \times r$ a coefficienti in $\mathbb{K}$ si ha

$$(AB)^T = B^T A^T,$$

dove A^T indica la trasposta della matrice A.

Esercizio 5. Sia $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$.

(a) Dimostrare che f è invertibile se e solo se la sua duale $f^*\colon W^* \to V^*$ lo è e in tal caso si ha $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.

(b) Dimostrare che una matrice quadrata A è invertibile se e solo se la sua trasposta lo è, e in tal caso vale $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Esercizio 6. Utilizzare il risultato dell'esercizio 5 per dimostrare che $\mathrm{rg}(A^T) = \mathrm{rg}(A)$, per ogni matrice A $m \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$.

Esercizio 7. Sia $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$. Dimostrare che

$$Z(\mathrm{Im}(f^*)) = \ker(f),$$

dove, per ogni sottospazio U di V^*, il sottospazio $Z(U)$ di V è definito da $Z(U) = \{v \in V \mid \psi(v) = 0, \forall \psi \in U\}$.

Esercizio 8. Utilizzare il risultato dell'esercizio 7 per dimostrare che $\mathrm{rg}(A^T) = \mathrm{rg}(A)$, per ogni matrice A $m \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$.