Esercizi di algebra lineare (4 dicembre 2018)

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}^3$ dotato delle coordinate (x, y, z) rispetto alla base canonica, e sia $U \leq V$ il sottospazio definito dal sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \end{cases}$$

Determinare una base dello spazio quoziente V/U.

Esercizio 2. Sia $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo rappresentato, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Determinare gli autovalori di φ e le loro molteplicità algebriche e geometriche. Dire se φ sia diagonalizzabile.
- Determinare gli autospazi di φ.
- Dire se esista una bandiera (completa) di sottospazi invarianti per φ. Se sì, determinarla.
- Dire se esista una matrice invertibile P 3×3 tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice triangolare superiore. Se sì, esibire una tale P e calcolare $P^{-1}AP$.

Esercizio 3. Sia $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo rappresentato, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- Determinare gli autovalori di φ e le loro molteplicità algebriche e geometriche. Dire se φ sia diagonalizzabile.
- Determinare gli autospazi di φ.
- Dire se esista una bandiera (completa) di sottospazi invarianti (ovvero stabili) per φ. Se sì, determinarla.
- Dire se esista una matrice invertibile P 3×3 tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice triangolare superiore. Se sì, esibire una tale P e calcolare $P^{-1}AP$.

Esercizio 4. Sia $\varphi\colon V \to V$ un endomorfismo, e siano U_0 e U_1 sottospazi invarianti (ovvero stabili) per φ. Dimostrare che $U_0 \cap U_1$ e $U_0 + U_1$ sono stabili.

Esercizio 5. Sia $\varphi\colon V \to W$ un'applicazione lineare. Il *conucleo* di φ è definito come lo spazio vettoriale

$$\operatorname{coker}(\varphi) = W/Im(\varphi).$$

Dimostrare che φ è suriettiva se e solo se $\operatorname{coker}(\varphi) = \{0\}$.

Esercizio 6. Sia V uno spazio vettoriale e siano $\varphi, \psi\colon V \to V$ due endomorfismi di V. Sia infine $U \leq V$ un sottospazio che sia invariante sia rispetto a φ che rispetto a ψ. Supponiamo si abbia $\varphi|_U = 0$ e $\tilde{\psi} = 0$, dove $\varphi|_U : U \to U$ è la restrizione di φ a U e $\tilde{\psi}\colon V/U \to V/U$ è l'applicazione tra i quozienti indotta da ψ. Dimostrare che $\varphi \circ \psi = 0$.