Esercizi di algebra lineare (11 dicembre 2018)

Esercizio 1. Considerare i polinomi $p(t) = t^3 - t^2 - 2t + 2$ e $q(t) = t^4 - 5t^2 + 6$ in $\mathbb{Q}[t]$.

(a) Usando l'algoritmo di Euclide delle divisioni successive, calcolare il massimo comun divisore $d(t) := \mathrm{MCD}(p(t), q(t)) \in \mathbb{Q}[t]$.

(2) Determinare $a(t), b(t) \in \mathbb{Q}[t]$ tali che $a(t)p(t) + b(t)q(t) = d(t)$.

Esercizio 2. Sia $n \geq 1$. Considerare il polinomio $p(t) = t^n - 2$.

(a) Vedendo $p(t)$ come elemento di $\mathbb{C}[t]$, fattorizzare p come prodotto di polinomi irriducibili in $\mathbb{C}[t]$.

(b) Vedendo p come elemento di $\mathbb{Q}[t]$, dimostrare che p è irriducibile.
(Suggerimento: se $p(t) = q(t) \cdot r(t) \in \mathbb{Q}[t]$, come si fattorizza $q(t)$ in $\mathbb{C}[t]$? quanto vale $|q(0)|$?)

Esercizio 3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia $f : V \to V$ una applicazione lineare. Sia inoltre $\mathcal{B}$ una base di V.

(a) Nel caso $V = \mathbb{K}^n$ e $f = L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ con $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, denotiamo con q_A il polinomio minimo dell'applicazione L_A. Dimostrare che $q_A = q_{A^T}$.

(b) Dimostrare che $q_f = q_A$, dove $A = f^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$.

(c) Sia $f^* : V^* \to V^*$ l'applicazione duale di f. Dimostrare che $q_f = q_{f^*}$.

Esercizio 4. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$ e sia $f : V \to V$ un endomorfismo. Denotiamo con $\big|_f : \mathbb{K}[t] \to \mathrm{End}(V)$ l'applicazione di valutazione $\big|_f : p \mapsto p(f)$. Sia $k \geq 0$ il minimo intero tale che il sottoinsieme $\{\mathrm{id}_V, f, f^2, \ldots, f^k\}$ di $\mathrm{End}(V)$ non sia linearmente indipendente.

(a) Dimostrare che $(\mathrm{id}_V, f, f^2, \ldots, f^{k-1})$ è una base dell'immagine di $\big|_f$.

(b) Dimostrare che il polinomio minimo q_f di f ha grado esattamente k.

(c) Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.
Usando i punti precedenti, calcolare il polinomio minimo q_A dell'endomorfismo $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.
Calcolare il polinomio caratteristico p_A.

Esercizio 5. Sia $T : \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ l'endomorfismo $T(A) := A^T$ che manda una matrice nella sua trasposta.

(a) Calcolare il polinomio minimo q_T.

(b) Calcolare gli autovalori di T.

(c) Calcolare le dimensioni degli autospazi di T.
(Suggerimento: iniziare con i casi $n = 2, 3$.)

(d) Dire se T sia diagonalizzabile.

(e) Calcolare il polinomio caratteristico p_T.

Esercizio 6. Siano $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ e sia

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & a_n \\ 1 & 0 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & a_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K}).$$

(a) Dimostrare che $(-1)^n p_M(t) = t^n - (a_1 t^{n-1} + a_2 t^{n-2} + \dots + a_{n-1} t + a_n)$, dove p_M indica il polinomio caratteristico di M.

(b) Dimostrare che $M^{k-1} e_1 = e_k$ per $k = 1, \dots, n$, dove $\{e_1, \dots, e_n\}$ è la base canonica di $\mathbb{K}^n$.

(c) Dimostrare che $p_M(M) e_1 = 0$.

(d) Dimostrare che $p_M(M) e_k = 0$ per ogni $k = 1, \dots, n$ e quindi $p_M(M) = 0$.

(e) Dimostrare che il polinomio minimo q_M soddisfa $q_M = (-1)^n p_M$.