Esercizi di algebra lineare (14 gennaio 2019)

Esercizio 1. Sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo dello spazio vettoriale V, di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$. Supponiamo che il polinomio caratteristico di f f abbia tutte le radici in $\mathbb{K}$. Dimostrare che per ogni autovalore λ di f vale

$$\text{m.alg.}(\lambda) = \dim V_\lambda^{(\infty)}.$$

Esercizio 2. Siano A e B matrici 3×3 a coefficienti complessi. Dimostrare che A e B sono simili se e solo se hanno lo stesso polinomio caratteristico e lo stesso polinomio minimo.

Esercizio 3. Esibire due matrici 4×4 a coefficienti complessi A e B che non siano simili ma che abbiano lo stesso polinomio caratteristico e lo stesso polinomio minimo.

Esercizio 4. Se $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, con λ e μ non necessariamente distinti, allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $D^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix}$. Utilizzare questo fatto per calcolare A^n, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Esercizio 5. I numeri di Fibonacci sono definiti dalla ricorsione $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ per ogni $n \geq 2$. Esprimere questa ricorsione nella forma

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$$

per un'opportuna matrice 2×2 A, ed utilizzare questo fatto per ricavare una formula chiusa per F_n.

Esercizio 6. Dimostrare che se A e B sono due matrici quadrate che commutano, allora

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

e mostrare con un controesempio che questo non è vero se A e B non commutano.

Esercizio 7. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Determinare la decomposizione di Jordan $A = A_{\text{diag}} + A_{\text{nil}}$ ed utilizzarla per calcolare A^n per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 8. Datidue endomorfismi f e g di uno spazio vettoriale V, scriviamo

$$[f, g] = f \circ g - g \circ f,$$

di modo che $[f, g] = 0$ se e solo se f e g commutano. Dimostrare che se V ha dimensione finita l'equazione $[f, g] = \mathrm{Id}_V$ non ha soluzione. *(Suggerimento: utilizzare le proprietà della traccia).*

Esercizio 9. Sia $V = \mathbb{R}[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali nella variabile t e siano $\varphi, \psi \colon V \to V$ i due endomorfismi dati rispettivamente da

$$\varphi \colon p(t) \mapsto \frac{d}{dt} p(t);$$

$$\psi \colon p(t) \mapsto t\, p(t).$$

Calcolare $[\varphi, \psi]$.