

# Algebra lineare

ANNO ACCADEMICO 2018/19

## Prova scritta in itinere (6 novembre 2018)

Cognome: \_\_\_\_\_

Nome: \_\_\_\_\_

Numero di matricola: \_\_\_\_\_

Canale:      *A-L (Fiorenza-De Concini)*                      *M-Z (Mondello)*

| Esercizio | Punti totali | Punteggio |
|-----------|--------------|-----------|
| 1         | 7.5          |           |
| 2         | 7.5          |           |
| 3         | 7.5          |           |
| 4         | 7.5          |           |
| Totale    | 30           |           |

*Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 punti.*

**Verrà corretto solo quello che sarà scritto su queste pagine.**

Voto/30:

**Esercizio 1.** (a) Esprimere in forma cartesiana, ovvero nella forma  $x + iy$ , le due radici quadrate del numero complesso  $4 + 2i$ .

(b) Esprimere il numero complesso  $w = -\sqrt{3} + i$  in forma polare (o trigonometrica), ovvero nella forma  $\rho(\cos \theta + i \sin \theta)$  o, equivalentemente,  $\rho e^{i\theta}$ .

(c) Siano  $z_1, \dots, z_7$  le soluzioni dell'equazione  $z^7 = -\sqrt{3} + i$ .

Quante di esse hanno parte reale strettamente positiva? Esprimerle in forma trigonometrica.

**Risoluzione:**

(a) Se indichiamo con  $a + ib$  una delle radici quadrate cercate, allora l'equazione

$$(a + ib)^2 = 4 + 2i$$

ci dà

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 4 \\ 2ab = 2 \end{cases}$$

Da qui ricaviamo immediatamente  $b = a^{-1}$  (notiamo che la seconda equazione ci dice che sicuramente  $a \neq 0$ ) e dunque la prima equazione diventa

$$a^4 - 4a^2 - 1 = 0.$$

Ponendo  $c = a^2$  troviamo  $c^2 - 4c - 1 = 0$ , da cui  $c = 2 + \sqrt{5}$  oppure  $c = 2 - \sqrt{5}$ . Con la prima soluzione troviamo  $a = \sqrt{2 + \sqrt{5}}$  oppure  $a = -(\sqrt{2 + \sqrt{5}})$ . Le  $b$  corrispondenti si trovano semplicemnte calcolando gli inversi: per  $a = \sqrt{2 + \sqrt{5}}$  troviamo

$$b = \frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{1}{2 + \sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{5}}{(2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5})}} = \sqrt{\sqrt{5} - 2}.$$

Dunque una delle due radici quadrate di  $4 + 2i$  è  $(\sqrt{2 + \sqrt{5}}) + i(\sqrt{\sqrt{5} - 2})$ . L'altra è, come dev'essere, l'opposto di questa.

Alternativamente, possiamo scrivere  $4 + 2i$  in forma polare. Si trova  $4 + 2i = 2\sqrt{5} e^{i \arctg(1/2)}$  dunque le sue radici quadrate sono

$$\sqrt{2\sqrt{5}} e^{i \frac{\arctg(1/2)}{2}}; \quad -\sqrt{2\sqrt{5}} e^{i \frac{\arctg(1/2)}{2}}$$

In forma cartesiana le due radici sono quindi

$$\sqrt{2\sqrt{5}} \left( \cos \left( \frac{\arctg(1/2)}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\arctg(1/2)}{2} \right) \right); \quad -\sqrt{2\sqrt{5}} \left( \cos \left( \frac{\arctg(1/2)}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\arctg(1/2)}{2} \right) \right).$$

Volendo, si può ricordare che per  $t \geq 0$  vale

$$\cos \left( \frac{\arctg(t)}{2} \right) = \sqrt{\frac{\sqrt{1+t^2} + 1}{2\sqrt{1+t^2}}}$$

$$\sin \left( \frac{\arctg(t)}{2} \right) = \sqrt{\frac{\sqrt{1+t^2} - 1}{2\sqrt{1+t^2}}}$$

e dunque le due radici in forma cartesiana si possono scrivere più esplicitamente come

$$(\sqrt{\sqrt{5} + 2}) + i(\sqrt{\sqrt{5} - 2}); \quad -(\sqrt{\sqrt{5} + 2}) - i(\sqrt{\sqrt{5} - 2})$$

che sono proprio quelle trovate col primo metodo.

(b) Si ha

$$w = \sqrt{((\sqrt{3})^2 + 1^2)} e^{i(\arctg(-1/\sqrt{3})+\pi)} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2 \left( \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right)$$

c) Abbiamo visto al punto b) che in forma trigonometrica il numero complesso  $-\sqrt{3} + i$  si scrive come  $2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ . Le sue radici settime sono pertanto

$$2^{\frac{1}{7}} e^{i\left(\frac{5\pi}{42} + k\frac{2\pi}{7}\right)}; \quad k = 0, 1, \dots, 6$$

Quelle con parte reale positiva sono quelle per cui

$$\cos\left(\frac{5\pi}{42} + k\frac{2\pi}{7}\right) > 0$$

ovvero

$$\frac{5\pi}{42} + k\frac{2\pi}{7} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + 2h\pi$$

per qualche  $j \in \mathbb{Z}$ . Dividendo per  $\pi$  e moltiplicando per 42 questa condizione diventa

$$5 + 12k \in \dots (-105, -63) \cup (-21, 21) \cup (63, 105) \cup \dots$$

e si vede subito che dei sette numeri interi della forma  $5 + 12k$  che si ottengono al variare di  $k$  in  $\{0, 1, \dots, 6\}$ , ovvero

$$5, 17, 29, 41, 53, 65, 77$$

solo 5, 17, 65, 77 soddisfano questa condizione.

**Esercizio 2.** Sia  $\mathbb{R}[t]$  lo spazio vettoriale reale dei polinomi in  $t$  a coefficienti reali. Diremo che un polinomio  $p \in \mathbb{R}[t]$  ha almeno una radice intera se esiste  $n \in \mathbb{Z}$  tale che  $p(n) = 0$ . Quali dei seguenti sono sottospazi vettoriali di  $\mathbb{R}[t]$ ? (Giustificare la propria risposta con una dimostrazione oppure un controesempio.)

- (a)  $V = \{p \in \mathbb{R}[t] : p(2)^2 + p(3)^2 = 0\}$ .
- (b)  $W = \{p \in \mathbb{R}[t] : p \text{ ha almeno una radice intera}\}$ .
- (c)  $Z = \{p \in \mathbb{R}[t] : |p(1)| \geq |p(0)|\}$ .

**Risoluzione:**

- (a) Dato che siamo sul campo  $\mathbb{R}$  dei numeri reali, l'equazione  $p(2)^2 + p(3)^2 = 0$  è equivalente al sistema

$$\begin{cases} p(2) = 0 \\ p(3) = 0 \end{cases}$$

Una volta fatta questa osservazione è immediato verificare che  $V$  è un sottospazio di  $\mathbb{R}[t]$ . Infatti, se  $p, q \in V$  si ha

$$(p+q)(2) = p(2) + q(2) = 0 + 0 = 0; \quad (p+q)(3) = p(3) + q(3) = 0 + 0 = 0,$$

quindi  $p+q \in V$ . Similmente, se  $p \in V$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$(\lambda p)(2) = \lambda p(2) = \lambda \cdot 0 = 0; \quad (\lambda p)(3) = \lambda p(3) = \lambda \cdot 0 = 0,$$

quindi  $\lambda p \in V$ .

Alternativamente si può invocare il fatto, visto più volte a lezione, che l'applicazione

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R}[t] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ p &\mapsto \begin{pmatrix} p(2) \\ p(3) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

è un'applicazione lineare e osservare che  $V = \ker(\varphi)$ .

- (b) Il sottoinsieme  $W$  non è un sottospazio. Ad esempio il polinomio  $p(t) = t$  ed il polinomio  $q(t) = t-1$  appartengono a  $W$ , ma la loro somma è  $p(t) + q(t) = 2t - 1$ , che non ha alcuna radice intera.
- (c) Il sottoinsieme  $Z$  non è un sottospazio. Ad esempio il polinomio  $p(t) = t + 1$  ed il polinomio  $q(t) = -3t + 1$  appartengono a  $Z$ , ma la loro somma è  $p(t) + q(t) = -2t + 2$ , che non appartiene a  $Z$ .

**Esercizio 3.** Sia  $V = \mathbb{Q}[t]_{\leq 3}$  lo spazio vettoriale su  $\mathbb{Q}$  dei polinomi nella variabile  $t$  di grado minore o uguale a 3. Si considerino i due sottospazi  $U$  e  $W$  di  $V$  definiti da

$$U = \{p(t) \in V : p(1) = 0\};$$

$$W = \{p(t) \in V : p(t) = p(-t)\}.$$

- (a) Sia  $\mathcal{S}_1 = \{t - 1, t^3 - t^2, t^3 - 2t + 1\} \subseteq V$ . Verificare che  $\mathcal{S}_1 \subseteq U$ . È possibile estrarre da  $\mathcal{S}_1$  una base di  $U$ ? (Se sì, estrarre una tale base; altrimenti dimostrare che ciò non è possibile).
- (b) Sia  $\mathcal{S}_2 = \{1 + t^2, 1 + 2t^2, 2 + 3t^2\} \subseteq V$ . Verificare che  $\mathcal{S}_2 \subseteq W$ . È possibile estrarre da  $\mathcal{S}_2$  una base di  $W$ ? (Se sì, estrarre una tale base; altrimenti dimostrare che ciò non è possibile).
- (c) Determinare le dimensioni dei sottospazi  $U \cap W$  e  $U + W$  di  $V$ .
- (d) Determinare una base del sottospazio  $U \cap W$ .

**Risoluzione:**

- (a) Per ogni polinomio  $p(t) \in \mathcal{S}_1$  vale  $p(1) = 0$ , dunque  $\mathcal{S}_1 \subseteq U$ . Estraiamo da  $\mathcal{S}_1$  un sistema di vettori indipendenti usando le coordinate rispetto alla base standard  $\{1, t, t^2, t^3\}$  di  $V$  e l'algoritmo di Gauss:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quindi i tre vettori di  $\mathcal{S}_1$  sono linearmente indipendenti. Calcoliamo ora la dimensione di  $U$ . L'applicazione lineare

$$\begin{aligned} \varphi: V &\rightarrow \mathbb{Q} \\ p &\mapsto p(1) \end{aligned}$$

ha nucleo  $U$  ed è suriettiva (basta osservare cosa fa  $\varphi$  alle costanti), dunque ha rango 1. Per il teorema del rango abbiamo quindi

$$\dim U = \dim V - 1 = 4 - 1 = 3.$$

Dunque  $\mathcal{S}_1$  è una base di  $U$  (e in particolare si può estrarre da  $\mathcal{S}_1$  una base di  $U$ , semplicemente prendendo tutto  $\mathcal{S}_1$ ).

- (b) Per ogni polinomio  $p(t) \in \mathcal{S}_2$  vale  $p(t) = p(-t)$ , dunque  $\mathcal{S}_2 \subseteq W$ . Estraiamo da  $\mathcal{S}_2$  un sistema di vettori indipendenti usando le coordinate rispetto alla base standard  $\{1, t, t^2, t^3\}$  di  $V$  e l'algoritmo di Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi il terzo vettore si può scartare, ed un sistema massimale di vettori indipendenti estratto da  $\mathcal{S}_2$  è  $\{1 + t^2, 1 + 2t^2\}$ . In particolare  $(1 + t^2, 1 + 2t^2)$  è una base di  $\text{span}(\mathcal{S}_2)$ . Calcoliamo ora la dimensione di  $W$ . L'applicazione lineare

$$\begin{aligned} \psi: V &\rightarrow V \\ p &\mapsto p(t) - p(-t) \end{aligned}$$

ha nucleo  $W$ . Calcoliamo il rango di  $\psi$  rappresentando  $\psi$  come matrice rispetto alla base canonica  $\mathcal{B}$  di  $V$  (in partenza e in arrivo). Si vede immediatamente che

$$\psi_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

da cui  $\text{rg}(\psi) = 2$ . Dunque, per il teorema del rango,

$$\dim W = \dim V - 2 = 4 - 2 = 2.$$

In particolare  $(1 + t^2, 1 + 2t^2)$  sarà una base di  $W$  estratta da  $\mathcal{S}_2$ .

(c) L'intersezione  $U \cap W$  è il nucleo dell'applicazione lineare

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} : V \rightarrow \mathbb{Q} \oplus V$$

$$p \mapsto \begin{pmatrix} p(1) \\ p(t) - p(-t) \end{pmatrix}$$

La matrice che rappresenta quest'applicazione lineare rispetto alla base canonica di  $V$  in partenza e alla base  $\{1\}$  di  $\mathbb{Q}$  insieme alla base canonica di  $V$  in arrivo è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

che si vede immediatamente avere rango 3. Per il teorema del rango si ha allora

$$\dim(U \cap W) = 4 - 3 = 1.$$

Dalla formula di Grassmann ricaviamo quindi

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 3 + 2 - 1 = 4.$$

Alternativamente si possono mettere insieme i vettori delle basi di  $U$  e di  $W$  trovati nei punti (a) e (b) ed estrarne una base di  $U + W$ , che si vedrà avere cardinalità 4, e ricavare quindi dalla formula di Grassmann che  $\dim(U \cap W) = 1$ .

(d) Dobbiamo risolvere il sistema lineare omogeneo rappresentato in forma matriciale da

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right).$$

Mediante l'algoritmo di Gauss si trova immediatamente

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

ovvero

$$\begin{cases} a_0 = -\alpha \\ a_1 = 0 \\ a_2 = \alpha \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

dove abbiamo scritto  $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$  per il generico elemento  $p$  di  $V$  (in altre parole  $(a_0, a_1, a_2, a_3)$  sono le coordinate rispetto alla base canonica di  $V$ ). Una base di  $U \cap W$  è data quindi dal vettore di coordinate

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ovvero dal polinomio  $t^2 - 1$ .

**Esercizio 4.** Sia  $L_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(ovvero l'applicazione lineare rappresentata dalla matrice  $A$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^3$  presa sia come base di partenza che di arrivo). Siano  $U$  e  $W$  i due sottospazi di  $\mathbb{R}^3$  definiti da

$$U = \text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}, \quad \text{con} \quad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$W = \text{span}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}, \quad \text{con} \quad \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- Verificare che  $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$  è una base di  $U$  e che  $\mathcal{C} = (\vec{w}_1, \vec{w}_2)$  è una base di  $W$ .
- Dimostrare che  $L_A(U) \subseteq W$  e quindi la restrizione  $L_A|_U^W$  di  $L_A$  al sottospazio  $U$  in partenza e  $W$  in arrivo definisce una applicazione  $f := L_A|_U^W: U \rightarrow W$ .
- Determinare la matrice che rappresenta l'applicazione lineare  $f: U \rightarrow W$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$  come base di partenza e  $\mathcal{C}$  come base di arrivo.

**Risoluzione:**

- Per definizione  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$  è un sistema di generatori di  $U$ . Per verificare che  $\mathcal{B}$  è una base basta quindi mostrare che questi due vettori sono linearmente indipendenti, il che è immediato mediante l'algoritmo di Gauss. Analogamente si dimostra che  $\mathcal{C}$  è una base di  $W$ .
- Dato che  $L_A$  è lineare e  $\mathcal{B}$  è una base di  $U$ , per mostrare che  $L_A(U) \subseteq W$  basta mostrare che  $L_A(\mathcal{B}) \subseteq W$ , ovvero che i due vettori  $L_A(\vec{u}_1)$  e  $L_A(\vec{u}_2)$  si possono scrivere come combinazioni lineari di  $\vec{w}_1$  e  $\vec{w}_2$ . Calcoliamo  $L_A(\vec{u}_1)$  e  $L_A(\vec{u}_2)$  ed usiamo l'algoritmo di Gauss. Si ha:

$$L_A(\vec{u}_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$L_A(\vec{u}_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & -4 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi sia  $L_A(\vec{u}_1)$  che  $L_A(\vec{u}_2)$  si possono scrivere come combinazioni lineari di  $\vec{w}_1$  e  $\vec{w}_2$ .

- Dobbiamo esprimere  $L_A(\vec{u}_1)$  e  $L_A(\vec{u}_2)$  come combinazioni lineari di  $\vec{w}_1$  e  $\vec{w}_2$ . Dalla soluzione del punto (b), più precisamente dalla matrice ridotta a scala, sappiamo che queste combinazioni lineari sono

$$L_A(\vec{u}_1) = w_1 + w_2; \quad L_A(\vec{u}_2) = w_1 - w_2,$$

come è anche immediato verificare direttamente. La matrice cercata è dunque

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$