J ideale di $K[\vec{x}]$ $\quad \{J_\alpha\}_{\alpha \in A}$

$$\bigcap_\alpha V(J_\alpha) = \{\vec{x} \in \mathbb{A}^n : f_\alpha(\vec{x}) = 0 \ \forall f_\alpha \in J_\alpha\}$$

$$= V(J) \ ; \ J = (J_\alpha)$$

$$\bigcap_\alpha V(J_\alpha) = V((J_\alpha))$$

$\{V(J)\}$ è chiusa rispetto alle intersezioni arbitrarie

$\{V(J)\}$ è chiusa rispetto $\cap$

Rispetto all'unione ?

$V(J_1) \cup V(J_2) = ?$

$\{\bar{x} \in \mathbb{A}^n : f(x) = 0 \ \forall f \in J_1$ $\underrightarrow{\text{oppure}}$ $g(x) = 0$
$\forall g \in J_2\}$

Caso semplice J_1, J_2 principali
$J_1 = (f)$; $J_2 = (g)$

$\bar{x} \in \mathbb{A}^n : f(x) = 0$ oppure $g(x) = 0$.

$$\Updownarrow$$

$f(x) \cdot g(x) = 0$ $\qquad V(f) \cup V(g) \in V(f \cdot g)$

$J_1 = (f_1, \dots f_n)$

$J_2 = (g_1 \dots g_n)$

$V(J_1) \cup V(J_2) = \{ x : f_i(x) = 0 \ \forall i$ oppure $g_j(x) = 0$

$\forall j \} \longleftrightarrow \{ f_i(x) g_j(x) = 0 \quad \forall i, j \} = V(J)$

$J = (f_i g_i)$

$k = \mathbb{R}$

$\mathbb{A}^1(\mathbb{R})$

$\{x_0\} = V(J_0) \qquad J_0 = (x - x_0)$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4 \dots\} \overset{?}{\cup} \{0\} \subseteq \mathbb{R}$

$J_i = (x - i) \qquad \{i\} = V((x-i))$

$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} V(J_i) = \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$

$\nwarrow$ Non è della forma $V(J)$!

$2, 57, 318$

$f(x) = (x-2)(x-57)(x-318)$

$V(f) = \{2, 57, 318\}$

$\{V(J)\}$ è chiusa - rispetto intersezioni arbitrarie

- rispetto alle unioni finite

· $\emptyset, A^n \in V(J)$

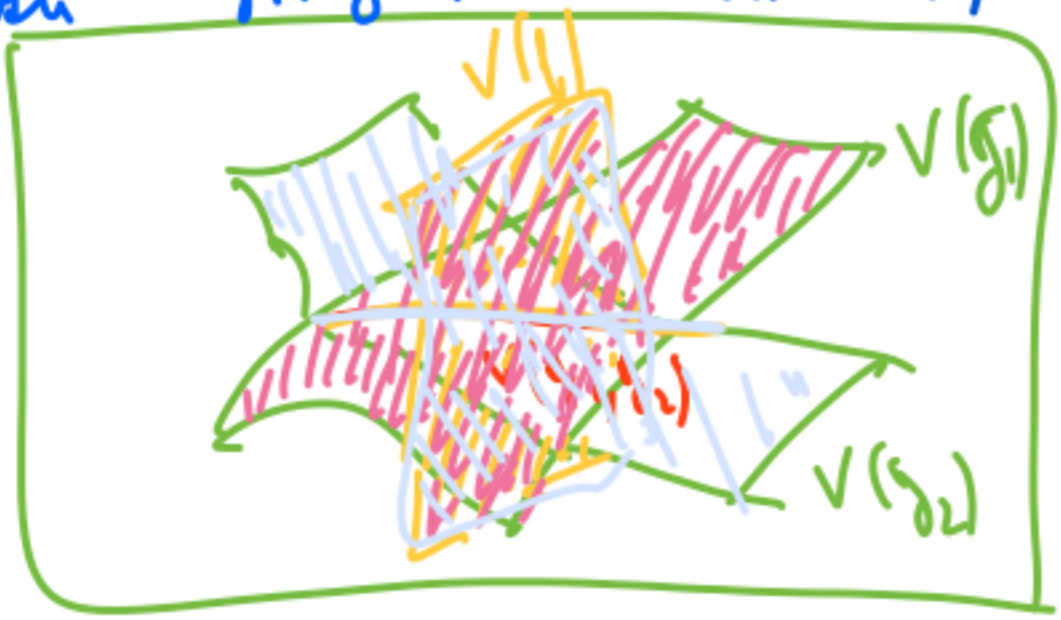
$\emptyset \overset{?}{=} V(J) \overset{\text{sì}}{\longleftrightarrow} \emptyset = V(1) = V(K[x^1 \dots x^n])$

$A^n \overset{?}{=} V(J) \longleftrightarrow A^n = V(0)$

$\{V(J)\}$ definisce una topologia sullo spazio A^n, della quale i $V(J)$ sono i chiusi

$V(f) \cup V(g_1, g_2)$ $\longleftrightarrow$ $V(f) \cup (V(g_1) \cap V(g_2$

principal ↗ fin. gen. ↗ $= V(g_1) \cap V(g_2)$



$$=$$

$$(V(f) \cup V(g_1)) \cap$$

$$(V(f) \cup (g_2))$$

$$= V(f \cdot g_1) \cap V(f \cdot g_2)$$

$$= V(fg_1, fg_2)$$

$$V(f_1, f_2) \cup V(g_1, g_2) = V(f_1, f_2) \cup \big(V(g_1) \cap V(g_2)\big)$$

$$= \big(V(f_1, f_2) \cup V(g_1)\big) \cap \big(V(f_1, f_2) \cup V(g_2)\big)$$

$\uparrow$ fin gi $\qquad$ $\uparrow$ fqnlc

$$= V(f_1 g_1, f_2 g_1) \cap V(f_1 g_2, f_2 g_2)$$

$$= V(f_i g_j)$$

$$\bigcap_{\alpha} V(J_\alpha) = V((J_\alpha))$$

$\|$

$$\{\vec{x} \in \mathbb{A}^n : f_\alpha(x) = 0 \ \forall f_\alpha \in J_\alpha\} = V(f_\alpha ; f_\alpha \in J_\alpha)$$

$$= V((f_\alpha)) = V((J_\alpha)) \qquad h \in (J_\alpha)$$

$$h = \sum_i a_i f_{\alpha_i} \qquad \underset{(f_{\alpha_i})}{\underset{\wedge}{\underline{f_{\alpha_i}}}} \in J_{\alpha_i}$$

$$f_\alpha \in J_\alpha \qquad (f_\alpha) \subseteq (J_\alpha)$$

I punti di $\mathbb{A}^n$ sono chiusi (di Zariski)

$p = (x^1_p, x^2_p \dots x^n_p)$

$\exists\ J_p : \quad V(J_p) = \{p\}$

$x^1 - x^1_p \in J_p \qquad x^2 - x^2_p \in J_p \dots$

$J_p = (x^1 - x^1_p, x^2 - x^2_p, \dots x^n - x^n_p)$

$q \in V(J_p) \Leftrightarrow q = p$

$\Leftarrow$) ovvio.

$\Rightarrow$) Diamo dimostrazione che se $f(q) = 0\ \boxed{\forall}\ f \in J_p \Rightarrow q = p$

Es $n = 2$; $K = \mathbb{R}$ $\quad p = (1, 2) \qquad J_p = (x-1, y-2)$

$$(x^1 - x^1_p)(q) = 0 ; \ (x^2 - x^2_p)(q) = 0 \dots$$

$$\begin{array}{c} (x^1 - x^1_p)(q) \\ \parallel \\ x^1(q) - x^1_p \end{array} = x^1_q - x^1_p \ \dots \Rightarrow x^i_q = x^i_p \Rightarrow q = p.$$

Altri esempi di chiusi di Zariski

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}^n = \mathbb{K}^n & \mathbb{A}^m = \mathbb{K}^m & \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m = \mathbb{K}^{n+m} = \mathbb{A}^{n+m} \\
X \arrow[u, phantom, sloped, "\subseteq"] & Y \arrow[u, phantom, sloped, "\subseteq"] & X \times Y \arrow[u, phantom, sloped, "\subseteq"] \arrow[u, bend right, start anchor=east, end anchor=east]
\end{tikzcd}$$

Domanda: se X è chiuso in $\mathbb{A}^n$ e Y è chiuso in $\mathbb{A}^m$

$\Rightarrow$ $X \times Y$ è chiuso $\mathbb{A}^{n+m}$?

$X = V(f_1 \dots f_n)$ $\quad f_i(\vec{x})$ $\quad$; $Y = V(g_1 \dots g_n)$ $\quad g_i(\vec{y})$

$X \times Y = ?$ $\quad X \times Y = \{(\vec{x}, \vec{y}) : \vec{x} \in \underset{V(f_1 \dots f_n)}{\overset{\shortparallel}{X}} ; \vec{y} \in \underset{V(g_1 \dots g_n)}{\overset{\shortparallel}{Y}}\}$

$f_i(\vec{x}) \in \mathbb{K}[\vec{x}] \subseteq \mathbb{K}[\vec{x},\vec{y}]$

$g_j(\vec{y}) \in \mathbb{K}[\vec{y}] \subseteq \mathbb{K}[\vec{x},\vec{y}]$

$$X \times Y = V(\tilde{f}_i, \tilde{g}_j)$$

$(\vec{x},\vec{y})$ è zero di $f_i(\vec{x})$

$$\uparrow$$

chiuso di $\mathbb{A}^{n+m}$

Più precisamente $\tilde{f}_i(\vec{x},\vec{y}) := f_i(\vec{x})$

$\tilde{g}_j(\vec{x},\vec{y}) := g_j(\vec{y})$

$$\begin{tikzcd}\text{Ideali di } \mathbb{K}[\vec{x}] \arrow[r, bend left, "V"] & \text{Chiusi di Zariski} \arrow[l, bend left, "I"]\end{tikzcd}$$

X chiuso $(\exists\, J : X = V(J)) \longrightarrow I_X = \{f : f|_X \equiv 0)$

$= \{f : X \subseteq V(f)\}$

$V(I_X) \overset{\checkmark}{=} X$ se X è chiuso? $\leftarrow$ lo sappiamo:

$V(I_X) = \overline{X} = X$ $\swarrow$ chiusura

$I_{V(J)} \overset{?}{=} J$

Esempio $J = (x^2) \subseteq \mathbb{K}[x]$

$\uparrow$ x al quadrato

Notazione: se $\vec{x} = (x^1 \ldots x^n)$

$(x^i)^2$; $(x,y,z) \ldots x^2$

$V(x^2) = \{ p \in \mathbb{A}^1(\mathbb{K}) = \mathbb{K} : (x(p))^2 = 0 \}$

$= \{ p : x(p) = 0 \} = \{0\}$

$1|_{x=0} = x \cdot g(x)|_{x=0}$

$1 = 0$

$x \in (x)$

$x \notin (x^2)$

$x = x^2 \cdot g(x)$

$I_{V(x^2)} = I_{(0)} = \underline{(x)} \Rightarrow I_{V(x^2)} \neq (x^2)$

Se $f(x) \in I_{(0)} \Rightarrow f(x)$ si annulla per $x = 0 \Rightarrow x \mid f(x)$

$f(x) = x \cdot g(x) \Rightarrow f(x) \in (x) \Rightarrow I_{(0)} \subseteq (x)$

Viceversa $x \in I_{(0)} \Rightarrow (x) \subseteq I_{(0)}$

$(x^2) \subseteq (x)$

$x \notin (x^2)$ ma una sua potenza sì $(x^2 \in (x^2))$

Il Teorema degli zeri di Hilbert

(Hilberts nullstellensatz)

$$J \rightsquigarrow V(J) \rightsquigarrow I_{V(J)}$$

$J \subseteq I_{V(J)}$ ovvio (se $f \in J \Rightarrow f \in I_{V(J)}$)

$f \in I_{V(J)}$ non è detto che $f \in J$, ma una qualche sua potenza sì : $\exists\, r : f^r \in J$

f è "radice r-esima" di un qualche elto $g \in J$ per qualche n

$\sqrt{J} = \{ f : \exists r \text{ con } f^r \in J \}$ radicale di J

$= \{ f : f^r = g$ per qualche $g \in J \}$

$= \{ f : \text{"} f = \sqrt[r]{g} \text{"}$ per qualche $g \in J)$

$J \subseteq \sqrt{J}$ (ovvio $r = 1$)

$I_{V(J)} = \sqrt{J}$ (Nullstellensatz)

Oss: è un ideale.

$\sqrt{J}$ è un ideale

$f_1, f_2 \in \sqrt{J} \Rightarrow f_1 + f_2 \in \sqrt{J}$

$\Downarrow$

$f_1^{r_1} \in J$, $f_2^{r_2} \in J$; $(f_1+f_2)^N =$

$$= \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} \underset{\in J}{\underbrace{\underset{\in J}{\underbrace{f_1^i \, f_2^{N-i}}}}}$$

$N \geq r_1 + r_2$

$i \geq r_1$

oppure

$N - i \geq r_2$

analogo

$f_1 = \underset{\in J}{f_2} \cdot f_2 \in J$

$\Downarrow$

$f_1^i \cdot f_2^{N-i} \in J$

$f^r \in J$

$\uparrow$

$f \in \sqrt{J}$, $a \in R$

anello commutativo!

$\downarrow$

$a \cdot f \overset{?}{\in} R$ $\quad (af)^r = a^r \cdot \underset{\in J}{f^r} \in J$.