Ideali radicali di $K[x^1, \dots x^n]$ $(J = \sqrt{J})$ $\underset{I}{\overset{V}{\rightleftarrows}}$ Varietà affini (chiusi della topologia di Zariski)

Esempio 1.7 $\quad \mathbb{K}[pt] = \mathbb{K}$

X varietà affine. $X = V(J)$ $J \subseteq \mathbb{K}[x^1 \dots x^n]$ $\quad J = \sqrt{J}$

$pt \in \mathbb{A}^0 \quad pt = \mathbb{A}^0$; $pt \in \mathbb{A}^1$

$pt \in \mathbb{A}^n$ es $n = 2$

$p = (p^1, \dots p^n)$

$p = V(x^1 - p^1, \dots x^n - p^n)$

$$K[X] = \mathbb{K}[x^1, \dots x^n] \Big/ I_{X \subset J}$$

$$\mathbb{K}[pt] = \mathbb{K}[x^1, \dots x^n] \Big/ (x^1 - p^1, \dots x^n - p^n) \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}$$

$$\mathbb{K}[x^1 \dots x^n] \xrightarrow{\;1_p\;} \mathbb{K}$$

$$f(x^1, \dots x^n) \longmapsto f(p^1, \dots p^n)$$

$$\mathbb{K} = \operatorname{Im}(1_p) \cong \mathbb{K}[x^1 \dots x^n] \Big/ \operatorname{Ker}(1_p) = \{ f \in \mathbb{K}[x^1 \dots x^n] : f(p) = 0 \}$$

(bastano i polinomi costanti)

$$\uparrow ?$$

$$(x^1 - p^1, \dots x^n - p^n)$$

$\forall f \in \mathbb{K}[x^1, \dots x^n]$ $\quad f(\vec{x}) = \sum_{|\alpha| \geq 0} a_\alpha \prod_i (x^i - p^i)^{\alpha_i}$

$f(p) = a_0$; $f(p) = 0 \Leftrightarrow a_0 = 0$

$\Rightarrow f(x) = \sum_{|\alpha| \geq 1} a_\alpha \prod_i (x^i - p^i)^{\alpha_i} \in ((x^i - p^i))$

$$\operatorname{Ker}(1_p) \underset{\supseteq}{\subseteq} ((x^i - p^i))$$

$\sqrt{(x)} = (x)$

<u>dim</u>: $f \in \sqrt{(x)} \Rightarrow f^r \in (x) \Rightarrow f \cdot f^{r-1} \in (x)$

x è irriducibile quindi questo ideale è primo

$\Rightarrow \begin{cases} f \in (x) \\ f^{r-1} \in (x) \end{cases} \xrightarrow[\text{su } r]{\text{per induzione}} f \in (x)$

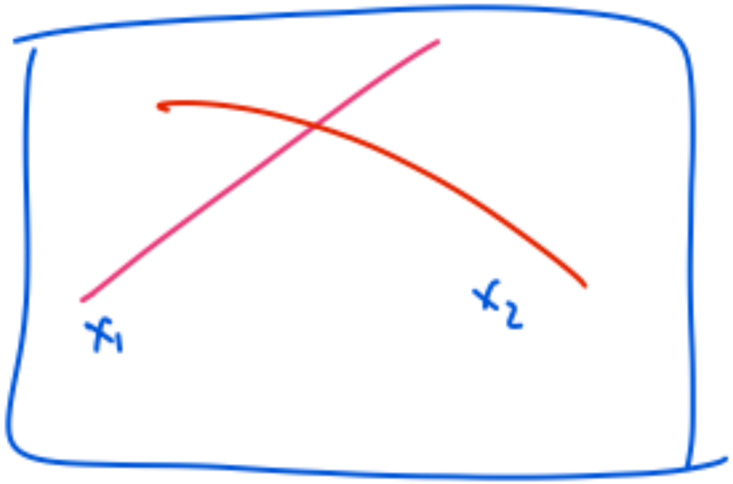
J ideale <u>primo</u> $\Rightarrow J$ è radicale $(J = \sqrt{J})$

<u>Oss</u>: $J = (x \cdot (x-1)) \subseteq \mathbb{K}[x]$ $\quad$ J è radicale ma J non è primo.

$V(J) = \{0\} \cup \{1\}$

Cosa intuiamo quando diciamo che X è fatto di un solo pezzo? (vorremo che questo si traduce nel fatto che I_X sia primo)

Es In $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$



$X = X_1 \cup X_2$

$\Updownarrow$

X è riducibile

$\Uparrow$

è unione di due chiusi propri.

X varietà affine irriducibile $\Longleftrightarrow$ I_X è primo

$\Longleftrightarrow$ $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[x^1 \dots x^n] / I_X$ è un dominio di integrità

$\rightarrow$ Possiamo costruire il suo campo dei quozienti

$Q(\mathbb{K}[X]) = \mathbb{K}(X)$

$$\left\{ \frac{p}{q} , \; q \notin I_X \right\} / \sim \qquad \frac{p_1}{q_1} \sim \frac{p_2}{q_2} \Longleftrightarrow \left. \frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2} \right|_X \equiv 0$$

$$\shortparallel$$

$$q_1 p_2 - p_1 q_2 \in I_X \Longleftrightarrow q_2 p_1 - p_2 q_1 \big|_X \equiv 0 \Longleftrightarrow \left. \frac{q_2 p_1 - q_1 p_2}{q_1 q_2} \right|_X \equiv 0$$

non deve essere $\equiv 0$ su X

$q_1 \notin I_X$; $q_2 \notin I_X$. Voglio che questo implichi $q_1 q_2 \notin I_X$. Suppongo $q_1 q_2 \in I_X$, I_X primo . Allora $q_1 \in I_X$ oppure $q_2 \in I_X$ contro l'ipotesi

Spazi topologici irriducibili

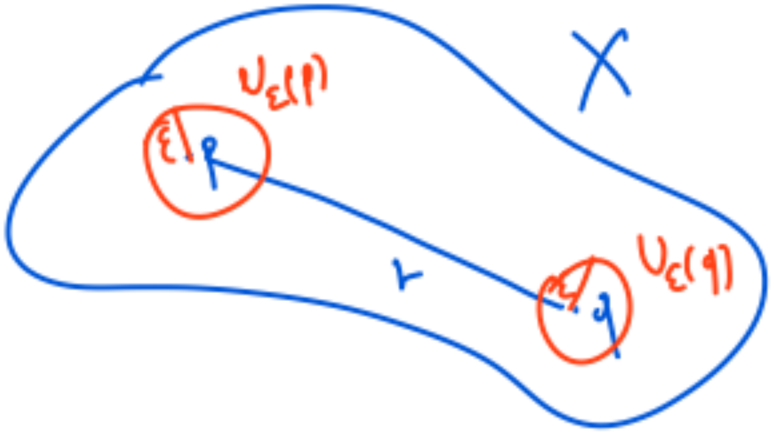
Def: X spazio topologico si dice <u>irriducibile</u> se non si può scrivere come unione di due chiusi propri. Ovvero se $X = X_1 \cup X_2$ con X_1, X_2 chiusi allora $X_1 = X$ oppure $X_2 = X$.

Oss: X spazio topologico è irriducibile se
U_1, U_2 aperti di X, $U_1 \cap U_2 = \emptyset \Rightarrow U_1 = \emptyset$ oppure $U_2 = \emptyset$

equivalentemente U_1, U_2 aperti non vuoti di $X \Rightarrow U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.
(ed ovviamente aperto)

X metrizzabile con almeno due punti p e q

$\Rightarrow X$ non è irriducibile



$2\varepsilon < r$

$U_\varepsilon(p), U_\varepsilon(q) \neq \emptyset$

$U_\varepsilon(p) \cap U_\varepsilon(q) = \emptyset$

Esempi nella topologia di Zariski

pt è irriducibile

$\mathbb{A}^1(\mathbb{K})$ è irriducibile

$V(x^2+y^2-1) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ è irriducibile

$V(J)$ con J ideale primo è irriducibile

Varietà affini $\rightleftarrows$ Ideali radicali

$$X_1 \subseteq X_2 \longleftrightarrow I_{X_2} \subseteq I_{X_1}$$

se f si annulla su X_2
allora f si annulla su X_1

X_2 è definito da un sistema che un sottosistema del sistema di equazioni che definisce X_1

$$X_1 \subsetneq X_2 \Longleftrightarrow I_{X_2} \subsetneq I_{X_1}$$

Supponiamo $X_1 \subsetneq X_2$ $\exists\, p \in X_2$ $p \notin X_1$

Voglio mostrare che

$I_{X_2} \subsetneq I_{X_1}$ ovvero $\exists\, f \in I_{X_1}$

con $f \notin I_{X_2}$. Basta $\underbrace{\text{esibire } f \in I_{X_1} \text{ con } f(p) \neq 0}$

Se $f(p) = 0$ $\forall f \in I_{X_1} \Rightarrow p \in V(I_{X_1}) = X_1$ contro l'ipotesi

Quindi $\exists\, f \in I_{X_1} : f(p) \neq 0$

$\overline{X_1} = X_1$ (stiamo supponendo X_1, X_2 varietà (chiusi))

Viceversa. $I_{X_2} \subsetneq I_{X_1}$. Voglio dimostrare $X_1 \subsetneq X_2$

ovvero che $\exists\, p \in X_2$ $p \notin X_1$.

Per ipotesi $I_{X_2} \subsetneq I_{X_1} \Rightarrow \exists\, f \in I_{X_1}$, $f \notin I_{X_2}$

$(f) \subseteq I_{X_1}$

$X_1 = V(I_{X_1}) \subseteq V(f) \Rightarrow X_1 \subseteq V(f)$

Voglio mostrare che $X_2 \not\subseteq V(f)$

Infatti se $X_2 \subseteq V(f) \Rightarrow I_{V(f)} \subseteq I_{X_2}$

$$\begin{array}{c} I_{V(f)} \\ \| \\ f \in \sqrt{(f)} \end{array}$$

Dunque $X_2 \not\subseteq V(f) \Rightarrow \exists\, \underline{p \in X_2}$ con $p \notin V(f)$

Poiché $X_1 \subseteq V(f)$, se $p \in X_1$ allora $p \in V(f)$ contro quanto appena detto

Quindi $\underline{p \notin X_1}$

__Corollario__ : X varietà affine. Allora X è irriducibile $\iff$ I_X è primo

__Dim__: X sia irriducibile. Siano $f, g \in \mathbb{k}[x^1, \dots, x^n]$ t.c. $f \cdot g \in I_X \Rightarrow X = V(I_X) \subseteq V(f \cdot g) = V(f) \cup V(g)$

$\Rightarrow X = \underbrace{(X \cap V(f)) \cup (X \cap V(g))}_{\text{chiusi}} \Rightarrow X = X \cap V(f) \to X \subseteq V(f)$

oppure $X = X \cap V(g) \to X \subseteq V(g)$

$\to f \in I_X$ oppure $g \in I_X \to I_X$ è primo.

Viceversa. $\underline{I_X \text{ sia primo.}}$

$X = X_1 \cup X_2$ con $X_1 \subsetneq X$ $\quad X_2 \subsetneq X$

Se $X_1 \subsetneq X \Rightarrow I_X \subsetneq I_{X_1}$; analogamente $I_X \subsetneq I_{X_2}$

$\exists f \in I_{X_1}$, $f \notin I_X$; $\exists g \in I_{X_2}$: $g \notin I_X$

$$\begin{array}{ccc} V(f\cdot g) & = & V(f) \cup V(g) \\ \cup\!\!| & & \cup\!\!| \qquad \cup\!\!| \\ X_1, X_2 & & X_1 \qquad X_2 \end{array}$$

$f \in I_{X_1} \Rightarrow X_1 = V(I_{X_1}) \subseteq V(f)$

$g \in I_{X_2} \Rightarrow X_2 \subseteq V(g)$

$X = X_1 \cup X_2 \subseteq V(f\cdot g) \Rightarrow f\cdot g \in I_X \Rightarrow f \in I_X$ oppure $g \in I_X$

contro l'ipotesi

In particolare $f \in K[x_1 \ldots x_n]$ polinomio irriducibile

$\Leftarrow$ (f) è un ideale primo $\Leftrightarrow$ $V(f)$ è una varietà irriducibile.

(f) primo $\Leftrightarrow$ f irriducibile (è vero in ogni dominio a fatt. unica)

(f) primo. Se $f = f_1 \cdot f_2 \Rightarrow f_1 \cdot f_2 \in (f) \Rightarrow f_1 \in (f)$ oppure $f_2 \in (f)$

$\Rightarrow f \mid f_1$ oppure $f \mid f_2$. Se $f \mid f_1 \Rightarrow f_1 = a \cdot f \Rightarrow \underbrace{f_1 \cdot f_2}_{= f} = \underbrace{a}_{\in \mathbb{K}^*} \cdot f \cdot f_2$

$\Rightarrow f_1 = af$ con $a \in \mathbb{K}^*$, $f_2 = a^{-1} \Rightarrow$ la fatt. è banale

Viceversa. f irriducibile $a \cdot b \in (f)$

$\Rightarrow a \cdot b = f \cdot c \rightarrow$ fattorizzo in irriducibili $a = a_1 \cdots a_n$, $b = b_1 \cdots b_l$, $c = c_1 \cdots c_m$

$a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_l = f c_1 \cdots c_m$

$\Rightarrow f = a_i \Rightarrow f \mid a$ oppure $f = b_i \Rightarrow f \mid b$

X varietà affini

I_X ideale di X

$$\sqrt{I_X} = I_X$$

Infatti $\sqrt{I_X} \underset{\uparrow \text{ Hilbert}}{=} I_{V(I_X)} = I_{\overline{X}} = I_X$

Funzioni razionali tra varietà affini

<u>Idea</u>: gli aperti di Zariski sono molto grandi
(i chiusi sono molto piccoli)

X varietà irriducibile

$f \in \mathbb{K}(X)$ $\quad f = \frac{p}{q}$, con $p, q \in \mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[x^1 \dots x^n]/_{I_X}$

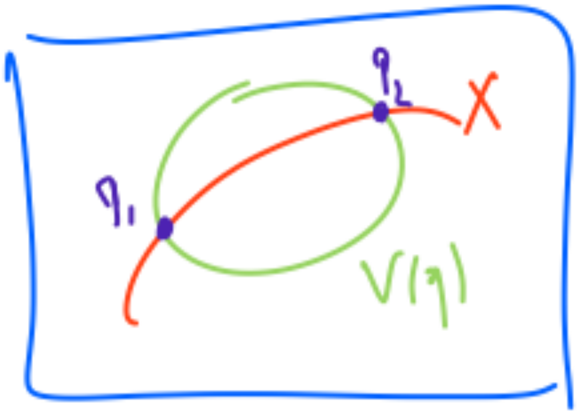
$q \notin I_X$ (I_X è primo, quindi tutto questo ha senso)

$V(q) \not\supseteq X \to \exists A \in X : A \notin \underset{\text{chiuso}}{V(q)} \leftrightarrow q(A) \neq 0$

$X \setminus V(q) = \{x \in X : q(x) \neq 0\}$ è aperto

Il luogo $X \setminus V(q)$ di tutti i punti di X dove il denominatore q di $f = \frac{p}{q}$ non si annulla è un aperto non vuoto. In particolare sarà un aperto denso. quindi $\frac{f}{q}$ è definita quasi ovunque in X.

Es in $\mathbb{A}^2$



$f = q(x,y)$

$V(q)$ è una curva

f è definita in $X \setminus \{q_1, q_2\}$

Prendiamo alcune $f_1 \dots f_m \in K(X)$

f_1 è definita in U_1

f_2 è ... U_2

$\vdots$

f_m U_m

$f_1 \dots f_m$ sono tutte definite su $U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_m$

Intersezione finita di aperti di uno spazio irriducibile!
$\Rightarrow$ è non vuota!

$(f_1, \dots, f_m) : X \dashrightarrow \mathbb{A}^m(\mathbb{K})$

definita su U aperto di X

$X \dashrightarrow Y$ per definizione $\sim$

$\cong$

$\mathbb{A}^m$

$(f_1, \dots, f_m) : X \dashrightarrow \mathbb{A}^m$

$Y = V(J)$

$\forall p \in U \quad \forall g \in J$

$g(f_1(p), \dots, f_m(p)) = 0$

tale che

$(f_1 \dots f_m)\big|_U : U \to Y \subseteq \mathbb{A}^m$

$U \subseteq X$ luogo di definizione

<u>Oss</u>: X irriducibile, $U \subseteq X$ aperto $U \neq \emptyset \Rightarrow$

$\overline{U} = X$ (U è denso)

<u>dim</u> U aperto. $Y := X \setminus U$ è chiuso, $X = \underset{(X \setminus U)}{Y} \cup U \subseteq Y \cup \overline{U}$

X irriducibile $\Rightarrow X = \overline{U}$ oppure $X = Y \Rightarrow X = X \setminus U \Rightarrow U = \emptyset$ contro l'ipotesi

$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$

$X \dashrightarrow Y \dashrightarrow Z$

Ha senso $g \circ f$?

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] & Y \\ X \arrow[u, phantom, "\subseteq" description] & V \arrow[u, phantom, "\subseteq" description] \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

ha senso $g \circ f$ su quegli elementi $x \in X$ tali che $f(x) \in V$

Ovvero il dominio di $g \circ f$ è $f^{-1}(V)$ $(f : U \to Y)$

$f^{-1}(V) \neq \emptyset$? In generale non è vero. Basta prendere f costante $f(x) \equiv P \notin V$

Però se $\mathrm{Im}(f)$ contiene un aperto di Y allora $\mathrm{Im}(f) \cap V \neq \emptyset$ ← cioè f è <u>dominante</u>

$X \overset{f}{\dashrightarrow} Y \overset{g}{\dashrightarrow} Z$ f, g dominanti

$g \circ f$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}(Z) \arrow[r, "g^*"] \arrow[rr, bend right, "(g \circ f)^*"'] & \mathbb{K}(Y) \arrow[r, "f^*"] & \mathbb{K}(X) \end{tikzcd}$$

$X \overset{f}{\dashrightarrow} Y$ è un'equivalenza birazionale se $\exists$

$g : Y \dashrightarrow X$ t.c. $f \circ g = id_Y$ $g \circ f = id_X$

equivalentemente $\mathbb{K}(X) \underset{f^*}{\overset{g^*}{\rightleftarrows}} \mathbb{K}(Y)$ $\cong$