$\mathbb{P}^2$ è un modello minimale per la sua classe di equivalenza birazionale

Ovvero $f : \mathbb{P}^2 \longrightarrow Y$ regolare, equivalenza birazionale $\Rightarrow$ f è isomorfismo.

Segue da: "Se f non è un isomorfismo, allora $\mathbb{P}^2$ contiene sottovarietà eccezionali per f", ovvero $\exists\ Z \subseteq \mathbb{P}^2$ t.c. $\operatorname{codim}_{\mathbb{P}^2} Z = 1$, $\operatorname{codim}_Y f(Z) \geq 2$

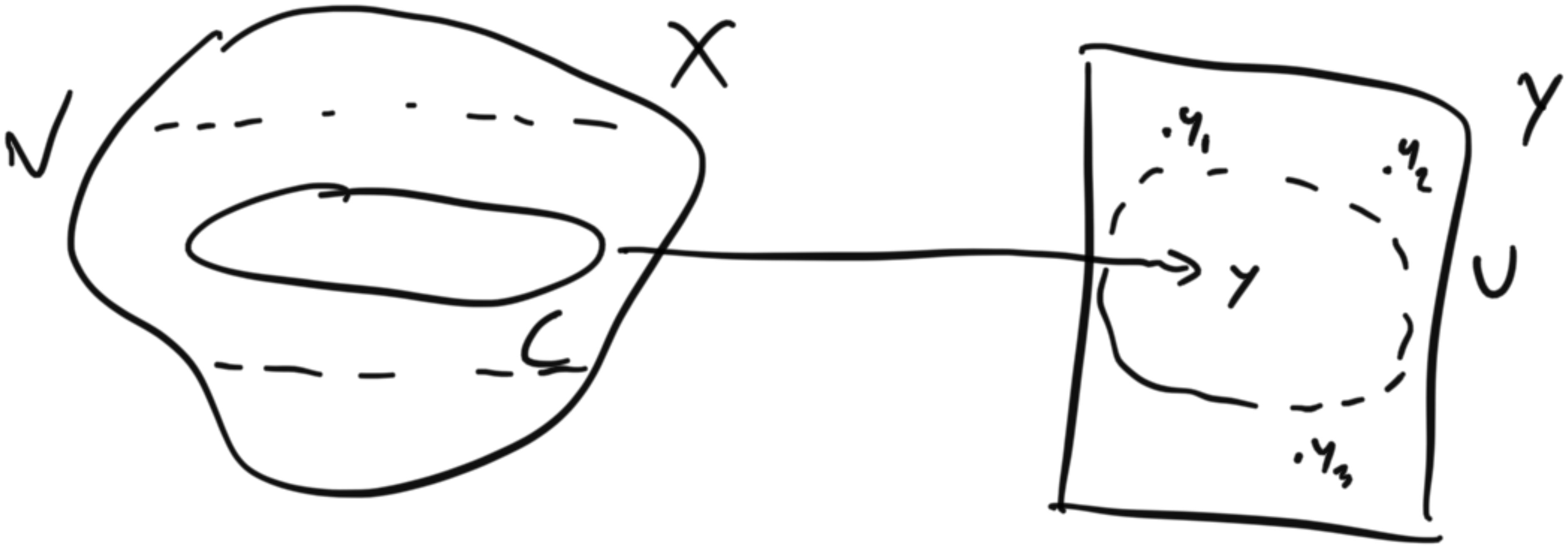
Ovvero $\exists\ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{curva eccezionale}}}{C} \subseteq \mathbb{P}^2$ curva t.c. $f(C)$ è un punto in Y.

Osserviamo la seguente proprietà delle curve eccezionali nelle superfici proiettive:

Se $C \subseteq X$ è una curva eccezionale rispetto a una qualche $f: X \to Y$

superficie proiettiva

allora $\exists \; C \subseteq V$ intorno aperto di C in X che non contiene altre curve. Detto più precisamente se $C' \subseteq V$ è una curva, allora $C' \subseteq C$.



Da questo segue che "se X contiene molte curve, allora non può contenere curve eccezionali".

$f: X \longrightarrow Y$ regolare, equivalenza birazionale

$f^{-1}: Y \dashrightarrow X$ razionale
$\phantom{f^{-1}: Y \dashrightarrow{}} \cap$
$\phantom{f^{-1}: Y \dashrightarrow{}} \mathbb{P}^N$

$\Rightarrow$ Il luogo di indeterminazione di f^{-1} ha codim ≥ 2

$\dim Y = 2 \Rightarrow$ il luogo di indeterminazione di f^{-1} è un insieme finito di punti. Sono i punti sopra i quali ci sono le curve eccezionali per f.

$\exists\ U$ aperto affine di Y t.c. $U \cap$ luogo di indeterminazione di

f^{-1} si riduce al solo punto $y = f(C)$

$V = f^{-1}(U)$. Sia $\underset{\text{irriducibile}}{C' \subseteq V}$ una curva. $C' \subseteq V \subseteq X \subseteq \mathbb{P}^N$

C' è una curva proiettiva. $f|_{C'} : \underset{\text{proiettiva}}{C'} \longrightarrow \underset{\text{affine}}{U}$

$f(C') = y_0 \in Y \Rightarrow C'$ è una curva eccezionale e y_0

è un punto di indeterminazione per f^{-1}. $\Rightarrow y_0 = y$

$\Rightarrow f(C') = y \Rightarrow C' \subseteq C$.

$X = \mathbb{P}^2$. Sia C eccezionale. Sia V intorno di

C in $\mathbb{P}^2$ t.c. V non contenga altre curve.

$V = \mathbb{P}^2 \rightarrow$ assurdo: $\mathbb{P}^2$ contiene curve non contenute in C

$V = \mathbb{P}^2 \setminus Z$ $\quad Z$ varietà proiettiva non vuota

$\uparrow$ dimo

Se $Z = D$ altra curva, C, D sono curve in $\mathbb{P}^2$

$\Rightarrow C \cap D \neq \emptyset \Rightarrow C \not\subseteq \mathbb{P}^2 \setminus D = \mathbb{P}^2 \setminus Z = V$ assurdo.

Allora $Z = \{P_1 \dots P_n\}$ insieme finito di punti

Ma $\forall C \subseteq \mathbb{P}^2$, $\forall P_1 \dots P_n$ $\exists C'$ curva che non passa per $P_1 \dots P_n$, $C' \not\subseteq C$. (esiste sempre una retta con queste proprietà)

Lo stesso tipo di argomento (X ha un grande gruppo di automorfismi $\Rightarrow$ in X posso spostare "un poco" una curva C

$\Rightarrow$ X non ha curve eccezionali) si applica a $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Oss: $\mathbb{P}^2$ e $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ sono entrambi modelli minimali per la loro classe di equivalenza birazionale.

$[\mathbb{P}^2] = [\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1]$. In questa classe ci sono due modelli minimali non isomorfi

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^2 & = & \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}^2 & & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \end{array}$$

Varietà normali

Idea intuitiva: una varietà normale è una varietà "non troppo singolare".

Def: X varietà quasi-proiettiva. Una normalizzazione di X è $f: X^\nu \longrightarrow X$ regolare, equivalenza birazionale, finito, con X^ν normale

Teorema: X q. proiett ammette una normalizzazione

(lo dimostreremo per X affine)

Teorema: X normale $\Rightarrow$ $\mathrm{codim}_X \mathrm{Sing}(X) \geq 2$

" X normale $\Rightarrow$ X non singolare in codimensione 1 "

Corollario: X curva normale $\Rightarrow$ X liscia (non singolare)

(per le curve la normalizzazione è una vera desingolarizzazione)

<u>Teorema</u> : X non singolare $\Rightarrow$ X normale

<u>Def</u>: Sia A un dominio di integrità

e sia $\mathbb{K}_A$ il campo dei quozienti di A

$A \hookrightarrow \mathbb{K}_A$

Diciamo che A è integralmente chiuso

se $\alpha \in \mathbb{K}_A$, α intero su $A \Rightarrow \alpha \in A$.

(ovvero se A è integralmente chiuso in $\mathbb{K}_A$)

Es. $\mathbb{Z}$ il campo dei quozienti di $\mathbb{Z}$ è $\mathbb{Q}$

Es: $\mathbb{Z}$. Il campo dei quozienti di $\mathbb{Z}$ è $\mathbb{Q}$.

$\mathbb{Z}$ è integralmente chiuso.

Sia $\alpha \in \mathbb{Q}$, α intero su $\mathbb{Z}$

$$\alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_n = 0 \qquad a_i \in \mathbb{Z}$$

$\mathbb{Z}$ è UFD

$\alpha = \frac{u}{v}$, $u, v \in \mathbb{Z}$, $v \neq 0$; u, v privi di fattori comuni

$$u^n + \underbrace{a_1 u^{n-1} v + a_2 u^{n-2} v^2 + \dots + a_n v^n}_{\in (v)} = 0$$

$$\Rightarrow v \mid u^n \Rightarrow v \text{ è invertibile in } \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha = u/v \in \mathbb{Z}$$

u, v non hanno fattori comuni

Abbiamo dimostrato: A UFD $\Rightarrow$ A è integralmente chiuso

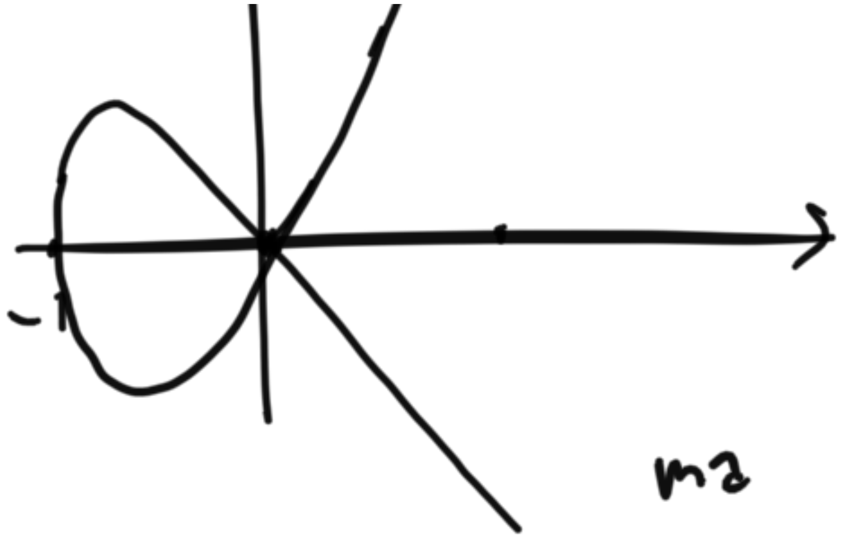
---

Def: X varietà affine irriducibile

X si dice <u>normale</u> se $\mathbb{K}[X]$ è integralmente chiuso. X quasi-proiettiva si dice normale se $\forall x \in X$ ha un intorno affine normale.

Es: $X \subseteq \mathbb{A}^2$ $\quad X = \{ y^2 = x^2 + x^3 \}$

X non è normale.



Per dimostrarlo esibisco

$t \in \mathbb{K}(X)$, t intero su $\mathbb{K}[x]$

ma $t \in \mathbb{K}[x]$.

Basta prendere $t = y/x$

$$t^2 = \frac{y^2}{x^2} = \frac{x^2(1+x)}{x^2} = 1+x$$

$$t^2 - (1+x) = 0$$

equazione monica a coeff in $\mathbb{K}[x]$ soddisfatta da t. $\Rightarrow$ t è intero su $\mathbb{K}[x]$

Ma $t \notin \mathbb{K}[x]$, ovvero $\nexists$ $a(x,y) \in \mathbb{K}[X]$ t.c

$t = a(x,y)$ in $\mathbb{K}[x]$. Cioè $\nexists$ soluzioni all'equazione

$$t = a(x,y) + b(x,y)\left(y^2 - x^2(1+x)\right) \quad \text{in } \mathbb{K}[x,y]$$

Detto bene $\left(t = \frac{y}{x}\right)$, stiamo dicendo che $\nexists$ $a, b \in \mathbb{K}[x,y]$

t.c. $$\underbrace{y - xa}_{\substack{\text{ha grado} \leq 1 \\ \text{in } y}} + \underbrace{b\left(y^2 - x^2(1+x)\right)}_{\substack{\text{ha grado} \geq 2 \text{ in } y \\ \text{a meno che } b \text{ non sia } 0.}} \equiv 0$$

ha grado 2 in y

a) $b = 0 \Rightarrow y - \underbrace{ax}_{\text{ha grado almeno 1 in } x} \equiv 0$

ha grado 0 in x

...

Richiamo di notazione

$x_0 \in X$; $\mathcal{O}_{X,x_0} = \{ f/g : f,g \in \mathbb{K}[X],\ g(x_0) \neq 0 \}$

$= \{ f/g : f,g \in \mathbb{K}[X],\ g \notin I(x_0) \}$

Più in generale, $Y \subseteq X$ irriducibile definiamo l'anello locale di X in Y come $\mathcal{O}_{X;Y} = \{ f/g,\ f,g \in \mathbb{K}[X],\ g \notin I(Y) \}$

è un anello locale con ideale massimale

$m_Y = \{ f/g,\ f \in I(Y) \}$.

Lemma: X varietà normale, $Y \subseteq X$ sottovarietà irriducibile $\Rightarrow \mathcal{O}_{X,Y}$ è integralmente chiuso

Dim: Possiamo supporre X affine. Sia $\alpha \in \mathbb{K}(\mathcal{O}_{X,Y})$ α intero su $\mathcal{O}_{X,Y}$. Vogliamo dimostrare $\alpha \in \mathcal{O}_{X,Y}$

$$\mathbb{K}(\mathcal{O}_{X,Y}) = \left\{ \frac{f_1/g_1}{f_2/g_2} \quad g_1, g_2 \notin I(Y) \right\}$$

$$= \left\{ \frac{f_1 g_2}{f_2 g_1} \quad , f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathbb{K}[X] \quad g_1, g_2 \notin I(Y) \right\}$$

$$= \mathbb{K}(X)$$

$\alpha \in \mathbb{K}(\mathcal{O}_{X,Y})$, α intero su $\mathcal{O}_{X,Y}$

$\Rightarrow \quad \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_n = 0 \qquad a_i \in \mathcal{O}_{X,Y}$

$a_i \in \mathcal{O}_{X,Y} \Rightarrow a_i = b_i / c_i \qquad b_i, c_i \in \mathbb{K}[X], \quad c_i \notin I(Y)$

$d_0 := c_1 c_2 \cdots c_n$. Y irriducibile $\Rightarrow I(Y)$ è primo

$\Rightarrow d_0 \notin I(Y)$

$$d_0 \alpha^n + d_0 a_1 \alpha^{n-1} + \dots + d_0 a_n = 0$$

$$d_0 \alpha^n + d_0 \frac{b_1}{c_1} \alpha^{n-1} + \dots + d_0 \frac{b_n}{c_n} = 0$$

$$d_0 \alpha^n + \underbrace{c_2 \cdots c_n b_1}_{d_1} \alpha^{n-1} + \dots + \underbrace{c_1 \cdots c_{n-1} b_n}_{d_n} = 0$$

$$d_0 \alpha^n + d_1 \alpha^{n-1} + \dots + d_n = 0 \qquad d_i \in \mathbb{K}[X]$$

$$d_0^{n-1}\left(d_0 \alpha^n + d_1 \alpha^{n-1} + \dots d_n\right) = 0$$

$$(d_0 \alpha)^n + \underset{\substack{\uparrow \\ e_1}}{d_1}(d_0\alpha)^{n-1} + \underset{\substack{\uparrow \\ e_2}}{d_0 d_2}(d_0\alpha)^{n-2} + \dots \underset{\substack{\uparrow \\ e_n}}{d_0^{n-1} d_n} = 0$$

$$\beta = d_0 \alpha$$

$$\beta^n + e_1 \beta^{n-1} + \dots + e_n = 0 \qquad e_i \in \mathbb{K}[X]$$

X normale $\Rightarrow \mathbb{K}[X]$ è integralmente chiuso

$$\beta = \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{K}[X]}}{d_0}\, \underset{\substack{\nwarrow \\ \mathbb{K}(X)}}{\alpha} \hookrightarrow \beta \in \mathbb{K}(X) \qquad \Rightarrow \beta \in \mathbb{K}[X]$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \beta / d_0 \qquad \beta \in \mathbb{K}[X] \qquad d_0 \in \mathbb{K}[X] \quad d_0 \notin I(Y)$$

$$\Rightarrow \quad \alpha \in \mathcal{O}_{X;Y}$$

<u>Corollario</u>: X normale $\Rightarrow \forall x \in X$, $\mathcal{O}_{X,x}$ è integralmente chiuso.

Vale il viceversa: Se $\forall x \in X$, $\mathcal{O}_{X,x}$ è integralmente chiusi $\Rightarrow X$ è normale

<u>Dim</u>: X affine. Devo dimostrare che

$$\alpha \in \mathbb{K}(X) \quad \text{integrale su} \quad \mathbb{K}[X] \Rightarrow \alpha \in \mathbb{K}[X]$$

$\underbrace{\alpha \in \mathbb{K}(X), \ \alpha \text{ intero su } \mathbb{K}[X]}$ $\Rightarrow \alpha \in \mathbb{K}[X]$.

$$\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \dots + a_n = 0 \qquad a_i \in \mathbb{K}[X]$$

In particolare $\forall x \in X$ $\quad a_i \in \mathcal{O}_{X,x}$

α, come elemento di $\mathbb{K}(\mathcal{O}_{X,x})$, è intero su $\mathcal{O}_{X,x}$. Ma per ipotesi gli $\mathcal{O}_{X,x}$ sono integralmente chiusi. Quindi $\alpha \in \mathcal{O}_{X,x}$ $\forall x$.

Da questo segue $\alpha \in \mathbb{K}[X]$. Infatti:

$\alpha \in \mathcal{O}_{X,x}$ significa che esistono $f_x, g_x \in \mathbb{K}[X]$

con $g_x(x) \neq 0$ t.c. $\alpha = f_x/g_x$

g_x

Sia $I = (g_x)_{x \in X} \subseteq \mathbb{K}[X]$, che è noetheriano

$I = (g_{x_1}, g_{x_2} \dots g_{x_n})$

$V(I) = \emptyset$ (se $p \in V(I) \Rightarrow g_x(p) = 0 \ \forall x \Rightarrow g_p(p) = 0$
ma per ipotesi $g_p(p) \neq 0$)

$I_{V(I)} = \sqrt{I}$; $V(I) = \emptyset \Rightarrow I_{V(I)} = (1)$

$\Rightarrow 1 \in \sqrt{I} \Rightarrow 1^r \in I \Rightarrow 1 \in I \Rightarrow I = (1)$

$\Rightarrow \exists \ a_1 \dots a_n \in \mathbb{K}[X]$:

$a_1 g_{x_1} + \dots + a_n g_{x_n} \equiv 1$

$\Rightarrow \alpha(a_1 g_{x_1} + \dots a_n g_{x_n}) \equiv \alpha$

$$\| $$

$$a_1 \cdot \alpha \cdot g_{x_1} + \dots a_n \alpha \cdot g_{x_n}$$

$$\|$$

$$a_1 \frac{f_{x_1}}{\cancel{g_{x_1}}} \cancel{g_{x_1}} + \dots \quad a_n \frac{f_{x_n}}{\cancel{g_{x_n}}} \cdot \cancel{g_{x_n}}$$

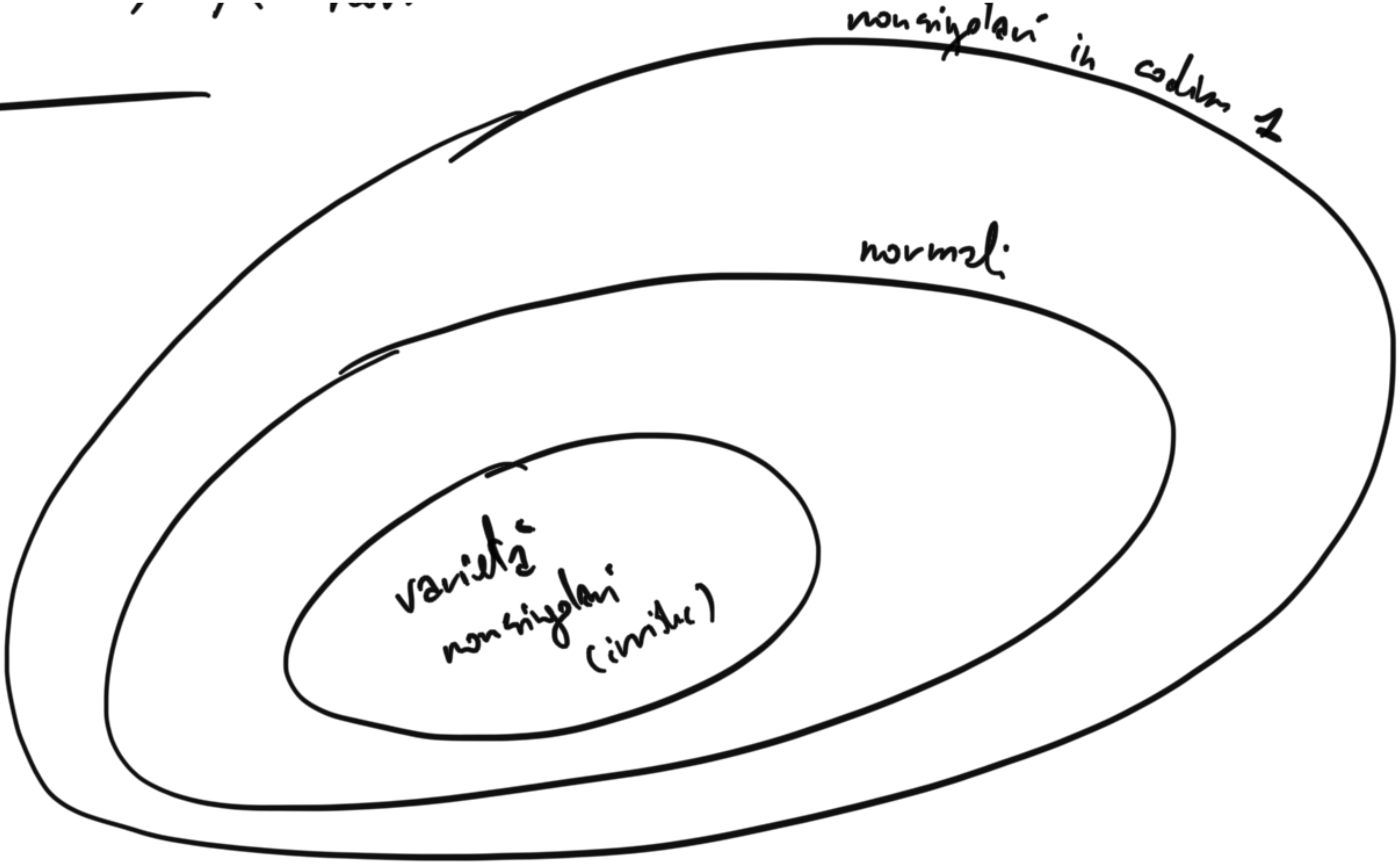
$$\Rightarrow \quad \alpha = a_1 f_{x_1} + \dots + a_n f_{x_n} \in \mathbb{K}[X]$$

__Corollario__ : X varietà irriducibile nonsingolare

$\Longrightarrow X$ normale

__dim:__ X irriducibile nonsing $\Rightarrow \forall x,\ \mathcal{O}_{X,x}$ è UFD

$\Rightarrow X$ normale



<u>Teorema</u>: X normale $\Rightarrow \operatorname{codim}_X \operatorname{Sing}(X) \geq 2$

<u>Lemma</u>: $Y \subseteq X$, X normale, Y di codimensione 1

$\Rightarrow \exists\ X'$ aperto affine di X t.c.

$\emptyset \neq Y' = Y \cap X'$, e $I(Y') \subseteq \mathbb{K}[X']$

è principale

(nella dimostrazione Shafarevich usa il "trucco del determinante" senza dire cosa sia. Vediamo cos'è: M modulo finito su un anello A

$\alpha \in \mathbb{K}_A$ supponiamo che $\alpha M \subseteq M$. Allora

α è intero su A.

<u>dim</u>: $M = (m_1 \dots m_n)$

$\alpha m_1 \in M$, ... $\alpha m_n \in M$

αm_i è una combinazione lineare a coeff in A degli m_i

$$\Rightarrow \quad \alpha \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{a coeff in } A}}{P} \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ quindi a coeff in $\mathbb{K}_A$

$\Rightarrow$ α come elemento di $\mathbb{K}_A$ è un autovalore della matrice $n \times n$ P a coeff in $\mathbb{K}_A$

α è radice del polinomio caratteristico di P.

è monico   in effetti

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}$ P ha coeff in A

α è intero su A. $\longleftarrow$ è monico a coeff in A)

Dimostriamo ora X normale $\Longrightarrow \operatorname{codim}_X(\operatorname{Sing}(X)) \geq 2$

dim: Supponiamo non sia così. Allora $\exists\, Y \subseteq \operatorname{Sing}(X)$ irriducibile con $\operatorname{codim}_X Y = 1$. Sia $n = \dim X$

Quindi ogni punto $y \in Y$ è un punto non-singolare per Y (ma sarà singolare per X).

A meno di restringermi all'aperto affine X' del lemma (e quindi a $Y' \subseteq Y$) posso supponiamo che l'ideale di Y sia principale

$I(Y) = (u)$. $y \in Y$ liscio per $Y \Rightarrow$

$\exists$ $u_1 \dots u_{n-1}$ parametri locali per Y in y.

$u_i \in \mathbb{K}[Y]$; $\mathbb{K}[X] \xrightarrow{|_Y} \mathbb{K}[Y] \to 0$

Posso scegliere rappresentanti $v_1 \dots v_{n-1}$ per $u_1 \dots u_{n-1}$

in $\mathbb{K}[X]$. $v_i\big|_Y = u_i$

$v_i(y) = u_i(y) = 0 \Rightarrow v_1 \dots v_{n-1} \in \mathfrak{m}_{y;X}$

$u \in \mathbb{K}[X]$, u definisce la varietà Y

$\Rightarrow u(y) = 0 \Rightarrow u \in \mathfrak{m}_{y;X}$

$\Rightarrow \quad m_{y;X} = (v_1, \dots v_{n-1}, u)$

$\Big|$ Si $\quad \varphi \in m_{y;X} \Rightarrow \varphi\big|_Y \in m_{y,Y} = (u_1, \dots u_{n-1})$

$\exists \underset{\mathbb{K}[X]}{a_1 \dots a_{n-1}} : \varphi\big|_Y = a_1 v_1 \dots a_{n-1} v_{n-1}\Big|_Y$

$\left(\varphi - \sum a_i v_i\right) \in K_n\big|_Y = (u)$

$m_{y;X}$ ha (al più) n generatori

$\Rightarrow \quad \dim m_{y,X} / m_{yX}^2 = \dim \Theta_{X,y} \leq n$

Ma $\quad \dim \Theta_{X,y} \geqslant \dim X = n$

$\Rightarrow \dim \Theta_{x,y} = n = \dim X \Rightarrow y$ è non singolare per X

contro l'ipotesi.