X normale $\iff \forall x \in X$, $\mathcal{O}_{X,x}$ è integralmente chiuso

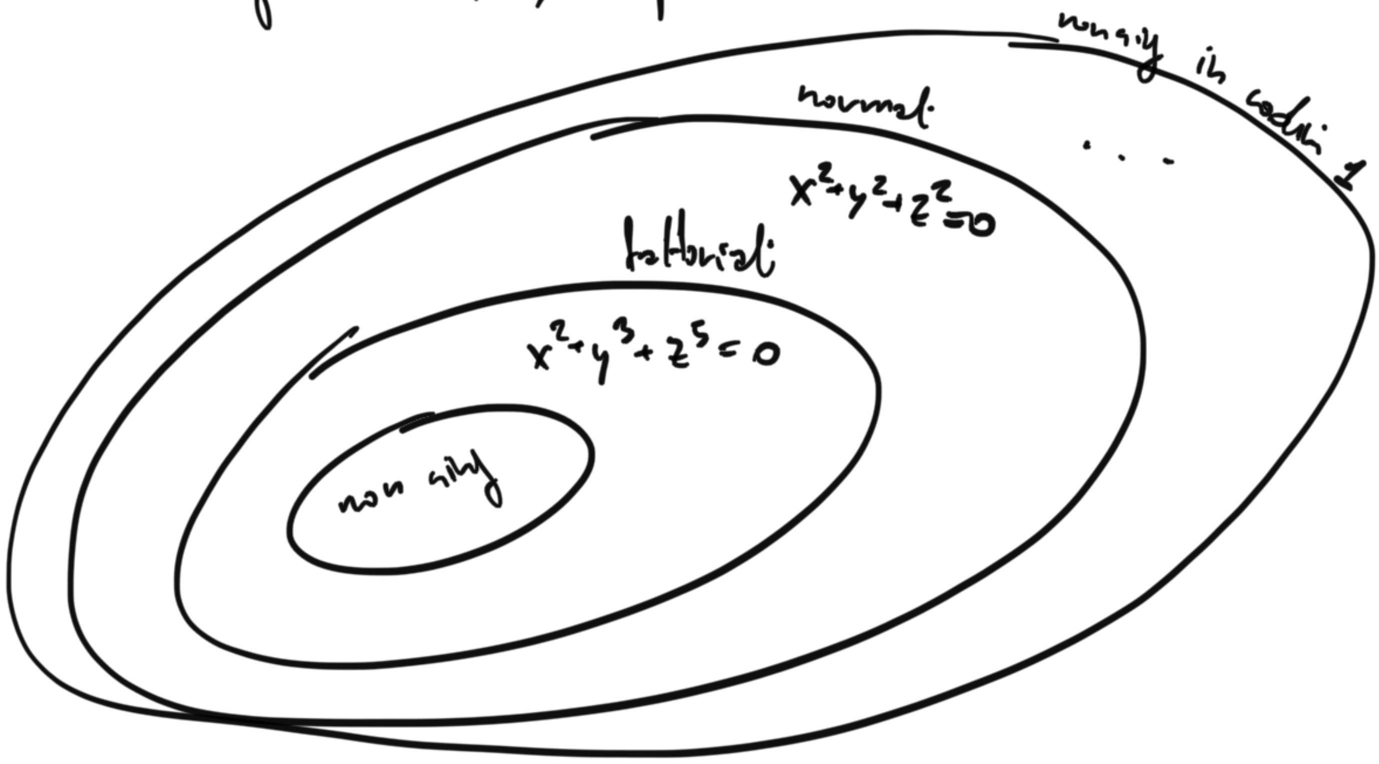
Def: X fattoriale $\iff \forall x \in X$, $\mathcal{O}_{X,x}$ è UFD

Sappiamo che A UFD $\Rightarrow$ A integralmente chiuso

quindi X fattoriale $\Rightarrow$ X normale

Sappiamo anche che X non singolare $\Rightarrow \forall x$, $\mathcal{O}_{X,x}$ è UFD

$\Rightarrow$ X non singolare $\Rightarrow$ X fattoriale



Oss: $X = x^2+y^2+z^2$ non è fattoriale è semplice

Basta esibire un punto $p \in X$ t.c. $\mathcal{O}_{X,p}$ non è UFD

$p=0$.
$$x^2+y^2 = (x+iy)(x-iy)$$
$$\parallel$$
$$-z^2 = (iz)\cdot(iz)$$

Sono due fattorizzazioni distinte per un elemento di $\mathcal{O}_{X,0}$

Oggi dimostriamo che X affine ammette sempre almeno una normalizzazione, ovvero $\exists$

$\nu : X^\nu \to X$, finita regolare, eq. birazionale, con X^ν normale.

Vedremo poi le proprietà universali della normalizzazione. Queste implicheranno l'unicità (a meno di isomorfismo)

Quindi vedremo come X curva q. proiettiva ammette sempre una normalizzazione, che è ancora quasi-proiettiva.

<u>Corollario</u>: X curva q.proiettiva $\Rightarrow \exists\ \tilde{X}$ curva proiettiva liscia con $\tilde{X} \underset{\text{biraz}}{\dashleftarrow\dashrightarrow} X$.

<u>dim</u>: X q. proiett

$$X \hookrightarrow \underset{\text{proiett}}{\overline{X}} \longleftarrow (\overline{X})^\nu$$

$(\overline{X})^\nu$ è ancora quasi-proiettiva

ma Y curva <u>proiettiva</u> $\Rightarrow Y^\nu$ è proiettiva

quindi

$$X \hookrightarrow \overline{X}_{\text{proj}} \longleftarrow (\overline{X})^\nu_{\text{proiett}}$$

eq. biraz

Un po' d'algebra

$A \subseteq B$ anelli commutativi

$b \in B$ si dice intero su A se b soddisfa un'equazione del tipo $b^n = a_1 b^{n-1} + \dots + a_n \quad a_i \in A$.

__Lemma__ : Sono equivalenti

i) b è intero su A

ii) $A[b] \subseteq B$ è un sottoanello che è finitamente generato come A-modulo

iii) $\exists\ C$ sottoanello di B con $A \subseteq A[b] \subseteq C \subseteq B$ t.c. C è finitamente generato come A-modulo

iv) $\exists\ M$, $A[b]$-modulo fedele $(\mathrm{Ann}_{A[b]}(M) = 0)$ che è finitamente generato come A-modulo

__dim:__ i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ iv) è ovvio

iv) $\Rightarrow$ i) è il trucco del determinante. In dettaglio

$b \cdot\cdot : M \longrightarrow M$; M finitamente generato come A-modulo

$\exists\ m_1 \ldots m_n$: $M = Am_1 + Am_2 + \ldots + Am_n$

$bm_1 = a^1_1 m_1 + a^2_1 m_2 + \ldots$

$$\begin{pmatrix} bm_1 \\ \vdots \\ bm_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}$$ P a coeff in A

$$(P - b\,\mathrm{Id}) \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

a coeff in $A[b]$

$$\mathrm{cofatt}(P - b\,\mathrm{Id})\,(P - b\,\mathrm{Id}) \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(P - b\,\mathrm{Id}) \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\det(\varphi - b\,\mathrm{Id}) = p_A(b) \in A[b]$

$\uparrow$ polinomio monico a coeff in A

$\Rightarrow p_A(b) \in \mathrm{Ann}_{A[b]}(M) = 0$

$\Rightarrow b$ è intero su A.

<u>Esercizio</u>: Usare il trucco del determinante per dimostrare il teorema di Cayley-Hamilton

$\left(\varphi \in \mathrm{End}(V), \quad p_\varphi(\varphi) = 0 \right)$

$\uparrow$ spazio vett di dim finita su $\mathbb{K}$.

<u>Def</u>: $A \subseteq B$. La <u>chiusura</u> <u>integrale</u> di A in B è l'insieme $\overline{A}^B = \{ b \in B : b$ è intero su $A \}$

<u>Prop</u>: $\overline{A}^B \subseteq B$ è un sottoanello, ed è integralmente chiuso.

<u>dim</u> $\alpha, \beta \in \overline{A}^B$

$\alpha^n = a_1 \alpha^{n-1} + a_2 \alpha^{n-2} + \dots + a_n \qquad a_i, b_j \in A$

$\beta^m = b_1 \beta^{m-1} + \dots + b_m$

$C = \{ c_{ij} \alpha^i \beta^j \ ; \ c_{ij} \in A, \ 0 \le i < n, \ 0 \le j < m \}$

$C \subseteq B$ è un sottoanello, che è finitamente generato come A-modulo

$$\begin{matrix} \alpha+\beta \in C & \Rightarrow & A[\alpha+\beta] \subseteq C & \Rightarrow & \alpha+\beta \text{ è intero} \\ \alpha\beta & & A[\alpha\beta] \subseteq C & & \alpha\beta \text{ su } A \end{matrix}$$

Resta da dimostrare che $\overline{A}^B$ è integralmente chiuso. Sia γ un elemento del campo dei quozienti di $\overline{A}^B$ che sia intero su $\overline{A}^B$.

Allora γ è intero su $\overline{A}^B$, che è intero su A.

$\Rightarrow \gamma$ è intero su A

($A \subseteq B \subseteq C$; B intero su A, C intero su B

$\Rightarrow C$ è intero su A;

$\gamma \in C \Rightarrow \gamma^n = b_1 \gamma^{n-1} + \dots + b_n \qquad b_i \in B$

$b_1^{m_1} = a_{11} b_1^{m_1-1} \dots$

$\tilde{C} = \{ a_I b_1^{i_1} b_2^{i_2} \cdots b_n^{i_n} \gamma^j ; a_I \in A; 0 \le i_1 < m_1 ; 0 \le i_2 < m_2 \dots 0 \le j < n \}$

$\tilde{C} \subseteq C$ sottoanello, finitamente generato come A-modulo

$\gamma \in \tilde{C} \Rightarrow A[\gamma] \subseteq \tilde{C}$)

__Lemma__ A anello integralmente chiuso, $\mathbb{K}_A$ campo dei quozienti di A; sia $\mathbb{L}$ una estensione finita del campo $\mathbb{K}_A$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}_A \arrow[r, hook, "\text{finita}"] & \mathbb{L} \\ A \arrow[u, hook] & \end{tikzcd}$$

A è un sottoanello di $\mathbb{L}$, quindi possiamo considerare la chiusura integrale di A dentro $\mathbb{L}$, chiamiamola B

$$B = \overline{A}^{\mathbb{L}}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}_A \arrow[r, hook, "\text{finita}"] & \mathbb{L} \\ A \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & B = \overline{A}^{\mathbb{L}} \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Si ha che B è un A-modulo finitamente generato.

<u>Teorema</u> X varietà affine irriducibile

$\Rightarrow \exists$ una normalizzazione di X.

<u>Dim</u>: Voglio dimostrare che $\exists\ X'$ con $\nu : X' \longrightarrow X$ con le proprietà di cui sopra

$\nu^*: \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X']$

Tra le proprietà di ν c'è che ν è finita

$$\mathbb{K}[X] \hookrightarrow \mathbb{K}[X']$$

Tra le proprietà di X' c'è che X' è normale

$\mathbb{K}[X']$ sia integralmente chiuso

$$\mathbb{K}[X'] \subseteq \mathbb{K}(X') = \mathbb{K}(X)$$

voglio ν sia equivalenza birazionale

[illegible] [illegible] [illegible] a quella $A = \mathbb{K}[X']$

Riassumendo sto cercando un anello $A \subseteq \mathbb{K}(X)$

con le seguenti proprietà:

- $\mathbb{K}[X] \subseteq A \subseteq \mathbb{K}(X)$
- A è integralmente chiuso
- $A = \mathbb{K}[X']$ per una qualche varietà affine

$$\mathbb{K}[X'] = \underbrace{\mathbb{K}[x^1 \dots x^n]}_{\text{finitamente generata come } \mathbb{K}\text{-algebra}} \big/ \underbrace{I(X')}_{\text{ideale radicale}}$$

ideale radicale $\Leftrightarrow$ $\mathbb{K}[x^1 \dots x^n]/I$ non ha nilpotenti

- A è finitamente generato come anello su $\mathbb{K}$

 e A $\underbrace{\text{è privo di nilpotenti}}_{\text{immediata dal fatto che } A \subseteq \mathbb{K}(X)}$

Poiché $\mathbb{K}[X]$ è finitamente generato su $\mathbb{K}$ come anello

[A è finitamente generato su $\mathbb{K}[X]$ come $\mathbb{K}[X]$-modulo]

$\Rightarrow$ [A è finitamente generato su $\mathbb{K}$ come anello]

(siano $f_1 \dots f_n$ generatori di A come $\mathbb{K}[X]$-modulo

siano $g_1 \dots g_m$ generatori di $\mathbb{K}[X]$ come anello

su $\mathbb{K}$. Allora $g_i f_k$ sono generatori di A come

anello su $\mathbb{K}$. $a \in A \Rightarrow a = p_1 \cdot f_1 + \dots p_n \cdot f_n$

$p_i \in \mathbb{K}[X] \Rightarrow p_i = p_i(g_1 \dots g_m)$)

Quindi mi basta trovare un anello A t.c.

- $\mathbb{K}[X] \subseteq A \subseteq \mathbb{K}(X)$
- A integralmente chiuso
- A $\mathbb{K}[X]$-modulo finitamente generato

Prendo $A = \overline{\mathbb{K}[X]}^{\mathbb{K}(X)} = \overline{\mathbb{K}[X]}$ ← chiusura integrale di $\mathbb{K}[X]$.

A questo punto usiamo il <u>lemma di normalizzazione di Noether</u>: X varietà affine, $\exists\, f: X \to \mathbb{A}^n$ finita. Algebricamente significa che

$$f^*: \mathbb{K}[T^1 \dots T^n] \hookrightarrow \mathbb{K}[X]$$

$\mathbb{K}[X]$ è intero su $\mathbb{K}[T^1 \dots T^n]$

$\mathbb{K}[T^1, \dots T^n] = \mathbb{K}[\underset{\text{liscio}}{\mathbb{A}^n}] \Rightarrow \mathbb{K}[T^1, \dots T^n]$ è integralmente chiuso

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}(T^1, \dots T^n) \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend left] & \mathbb{K}(X) \arrow[r, equal] & \mathbb{K}(X) \\
\mathbb{K}[T^1, \dots T^n] \arrow[u, hook] \arrow[r, hook, "\text{intera}"', "\text{finita}"'] \arrow[rr, bend right] & \mathbb{K}[X] \arrow[u, hook] \arrow[r, hook, "\text{intera}"'] & \overline{\mathbb{K}[X]} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}(T^1, \dots T^n) \arrow[r, hook, "\text{finita}"] & \mathbb{K}(X) \\
\mathbb{K}[T^1, \dots T^n] \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & \overline{\mathbb{K}[X]} = \overline{\mathbb{K}[T^1, \dots T^n]}^{\mathbb{K}(X)} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

i) $\mathbb{K}(T^1,\dots,T^n) \hookrightarrow \mathbb{K}(X)$ è una estensione finita

$\mathbb{K}[X]$ è ottenuto da $\mathbb{K}[T^1,\dots,T^n]$ aggiungendo un numero finito di elementi ($\mathbb{K}[X]$ è intero su $\mathbb{K}[T^1,\dots,T^n]$) e ognuno di questi elementi è algebrico su $\mathbb{K}(T^1,\dots,T^n)$ (di nuovo, perché sono interi su $\mathbb{K}[T^1,\dots,T^n]$) $\Rightarrow$ $\mathbb{K}(X)$ è generato a partire da $\mathbb{K}(T^1,\dots,T^n)$ aggiungendo un numero finito di elementi algebrici $\Rightarrow$ è un'estensione finita.

ii) $\overline{\mathbb{K}[X]} = \overline{\mathbb{K}[T^1,\dots,T^n]}^{\,\mathbb{K}(X)}$

Se $\alpha \in \overline{\mathbb{K}[T^1,\dots,T^n]}^{\,\mathbb{K}(X)} \Rightarrow \alpha \in \mathbb{K}(X)$

α è intero su $\mathbb{K}[T^1,\dots,T^n]$

$\Rightarrow \alpha$ è intero su $\mathbb{K}[X] \Rightarrow \alpha \in \overline{\mathbb{K}[X]}$

Se $\alpha \in \overline{\mathbb{K}[X]} \Rightarrow \alpha \in \mathbb{K}(X)$ e α è intero su $\mathbb{K}[X]$; $\mathbb{K}[X]$ è intero su $\mathbb{K}[T^1,\dots,T^n]$

$\Rightarrow \alpha$ è intero su $\mathbb{K}[T^1,\dots,T^n] \Rightarrow \alpha \in \overline{\mathbb{K}[T^1,\dots,T^n]}^{\,\mathbb{K}(X)}$.

$\Rightarrow$ Per il lemma, $\overline{\mathbb{K}[X]}$ è finito come $\mathbb{K}[T^1,\dots,T^n]$-modulo $\Rightarrow$ è finito come $\mathbb{K}[X]$-modulo.

Proprietà universali della normalizzazione

i) $\nu : X^\nu \longrightarrow X$ è <u>iniziale</u> rispetto alle mappe finite regolari, equivalenze birazionali $Y \longrightarrow X$

ovvero: Se

$X^\nu \xrightarrow{\exists!\, h} Y$

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[dr, "\nu"'] & ? & {} \arrow[dl, "f"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

f regolare, finita, f equiv. biraz.

ii) ν è <u>terminale</u> (o finale) tra le mappe regolari, dominanti, con dominio normale

ovvero

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\exists! g"] \arrow[dr, "f"'] & X^\nu \arrow[d, "\nu"] \\ & X \end{tikzcd}$$

f regolare dominante, Y varietà normale

<u>Corollario</u>: Se X^ν e $X^{\nu'}$ sono due normalizzazioni di X allora $\exists!\ X^\nu \xrightarrow{\sim} X^{\nu'}$ che rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} X^\nu \arrow[rr] \arrow[dr, "\nu"'] & & X^{\nu'} \arrow[dl, "\nu'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Dimostriamo i) e ii)

i) $f : Y \to X$ regolare finita equiv. birazionale

$\mathbb{K}[X] \subseteq \mathbb{K}[Y] \subseteq \mathbb{K}(Y) = \mathbb{K}(X)$

$\mathbb{K}[Y]$ è intero su $\mathbb{K}[X]$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{K}[X] \subseteq \mathbb{K}[Y] \subseteq \mathbb{K}(X) \\ \mathbb{K}[Y] \text{ intero su } \mathbb{K}[X] \end{array}\right\} \to \mathbb{K}[Y] \subseteq \overline{\mathbb{K}[X]}$$

$$\mathbb{K}[X^\nu] = \mathbb{K}[X']$$

$$\mathbb{K}[X] \subseteq \mathbb{K}[Y] \subseteq \mathbb{K}[X^\nu]$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}[X] \arrow[r, hook] \arrow[dr] & \mathbb{K}[Y] \arrow[d] \\
& \mathbb{K}[X^\nu]
\end{tikzcd}
\quad \rightsquigarrow \quad
\begin{tikzcd}
X & Y \arrow[l, "f"'] \\
& X^\nu \arrow[ul, "\nu"] \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

Questo dà l'esistenza di h. L'unicità segue dal fatto che ν ed f sono equivalenze birazionali

Su un aperto denso $h = \nu \circ f^{-1}$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow h \text{ è determinata su un aperto denso} \\ h \text{ è regolare} \end{array}\right\} \Rightarrow h \text{ è determinata su tutto } X^\nu.$$

ii) $f : Y \to X$ dominante, Y normale

$u \in \mathbb{K}[X^\nu]$; $\mathbb{K}[X^\nu]$ è intero su $\mathbb{K}[X]$

$\Rightarrow u$ è intero su $\mathbb{K}[X]$

f dominante $f^* : \mathbb{K}[X] \hookrightarrow \mathbb{K}[Y]$

$\Rightarrow$ A maggior ragione u è intero su $\mathbb{K}[Y]$

Y è normale $\Rightarrow \mathbb{K}[Y]$ è integralmente chiuso $\Rightarrow u \in \mathbb{K}[Y]$

$\Rightarrow \mathbb{K}[X^\nu] \subseteq \mathbb{K}[Y]$

$\Rightarrow \mathbb{K}[X] \subseteq \mathbb{K}[X^\nu] \subseteq \mathbb{K}[Y]$

$$\mathbb{K}[X] \hookrightarrow \mathbb{K}[X^\nu] \quad \rightsquigarrow \quad X \xleftarrow{\nu} X^\nu$$

$$\mathbb{K}[Y] \qquad\qquad f \searrow Y \swarrow g$$

Questo esibisce l'esistenza di g; l'unicità si fa come in i)

<u>Teorema</u>: X curva proiettiva (irriducibile) $\Rightarrow X^\nu$ è proiettiva

<u>dim</u>: Sia X^ν la normalizzazione di X.

X è proj $\Rightarrow X$ è q. proj $\Rightarrow X^\nu$ è q. proiettiva

Voglio dimostrare $\overline{X^\nu} = X^\nu$

$\uparrow$ chiusura proiettiva di X^ν

$$\begin{tikzcd}
U^\nu \arrow[r, dashed] \arrow[rr, dashed, bend left, "f"] \arrow[d, "\nu'"'] \arrow[dr, phantom, "?"] & X^\nu \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, hook, "i"] & X \\
U \arrow[r, hook, "j"] & \overline{X^\nu} &
\end{tikzcd}$$

Supponiamo $\overline{X^\nu} \neq X^\nu$. $\exists\, x \in \overline{X^\nu} \setminus X^\nu$. Sia U un intorno affine di x in $\overline{X^\nu}$.

Sia U^ν la normalizzazione di U

$f: U^\nu \dashrightarrow X$ è una mappa razionale

U^ν è la normalizzazione di $U \Rightarrow U$ ha <u>dim 1</u> ed è normale $\Rightarrow U$ è nonsingolare

X è proiettiva

f è regolare in codimensione 1

$\Rightarrow$ A è regolare
$\uparrow$ $\dim V = 2$

$$\begin{tikzcd} U^\nu \arrow[rr, bend left, "f"] & X^\nu \arrow[r, "\nu"] & X \end{tikzcd}$$

Per la proprietà universale della normalizzazione

$$\begin{tikzcd} U^\nu \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "f"] & X^\nu \arrow[r, "\nu"] & X \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} U^\nu \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\nu'"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X^\nu \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "i"] & X \\ U \arrow[r, hook, "j"'] & \overline{X^\nu} & \end{tikzcd}$$

(g coincide con la mappa birazionale

$$\begin{tikzcd} U^\nu \arrow[r, dashed] \arrow[d] & X^\nu \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & X \\ U \arrow[r] & \overline{X^\nu} & \end{tikzcd}$$

su un aperto denso di U^ν)

$$i(g(U^\nu)) = j(\nu'(U^\nu)) = j(U) = U$$

$$g(U^\nu) \subseteq X^\nu \Rightarrow \underbrace{i(g(U^\nu))}_{= U} \subseteq i(X^\nu) = X^\nu$$

$\Rightarrow x \in X^\nu$. Ma x lo avevamo scelto in $\overline{X^\nu} \setminus X^\nu$. Quindi non può esistere $x \in \overline{X^\nu} \setminus X^\nu$

ovvero $X^\nu = \overline{X^\nu} \Rightarrow X^\nu$ è proiettiva.