$f: X \longrightarrow Y$ morfismo regolare

X, Y affini

$y \in Y$; $f^{-1}(y) \subseteq X$ si chiama

la <u>fibra</u> di f in y.

$f^{-1}(y)$ è una varietà affine.

$f = (f^1 \dots f^n)$ f^i polinomi ; $\vec{y} = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$

$\vec{x} \in f^{-1}(y) \iff f^i(\vec{x}) = y^i$; $x \in X \iff g_u(\vec{x}) = 0$

equazioni polinomiali nelle x^j

equazioni che definiscono X

X

In modo del tutto analogo: $f: X \to Y$ morfismo regolare tra varietà proiettive $\Rightarrow f^{-1}(Y) \subseteq X$ è una sottovarietà proiettiva di X.

Più in generale, se $f: X \longrightarrow Y$ è un morfismo regolare di varietà quasi-proiettive $\Rightarrow f^{-1}(Y)$ è una sottovarietà quasi-proiettiva di X.

$f: X \longrightarrow Y$ regolare, X, Y q. proiettive, irriducibili. f dominante ($f(X)$ è denso in Y)

Allora $\dim X \geq \dim Y$

f dominante $\Rightarrow$ $f^*: \mathbb{K}(Y) \hookrightarrow \mathbb{K}(X)$

$$\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}(Y) \subseteq \mathbb{K}(X) \Longrightarrow \underbrace{\text{gr.tr}(\mathbb{K}(X):\mathbb{K})}_{= \dim X} \geq \underbrace{\text{gr.tr}(\mathbb{K}(Y):\mathbb{K})}_{= \dim Y}$$

Coroll: $f: X \to Y$ regolare e suriettiva, X, Y irriducibili

$\Rightarrow \dim X \geq \dim Y$

Prop: $f: X \to Y$ regolare e suriettiva, X, Y q. proiett irriducibili, $\dim X = n$; $\dim Y = m$. Allora

i) $n \geq m$ (appena visto)

ii) $\forall y \in Y \quad \dim(f^{-1}(y)) \geq n - m$

$\neq \emptyset$ in
quanto f
è suriettiva

iii) $\exists\, U$ aperto non vuoto di Y t.c. $\forall\, y \in U$

$$\dim f^{-1}(y) = n - m$$

<u>Coroll</u>: $f : X \to Y$ regolare, suriett., X, Y quasi-proiett irriducibili. $\forall\, k \geq 0$ sia $Y_k \subseteq Y$

$$Y_k = \{ y \in Y \;:\; \dim f^{-1}(y) \geq k \}$$

Se $k \leq n - m \Rightarrow Y_k = Y$

In generale vale Y_k è una sottovarietà chiusa di Y.

Prop: $f: X \to Y$ regolare suriettiva, X, Y proiettive

Y irriducibile ; $\forall y \in Y$, $f^{-1}(y)$ irriducibile

$\Rightarrow \dim f^{-1}(y) = d$, indipendentemente da y.

Allora X è irriducibile.

Corollario: Se X e Y sono proiettive irriducibili

$\to$ $X \times Y$ è proiettiva irriducibile

dim $Z = X \times Y$ $\qquad \pi_X : Z \longrightarrow X$

$\pi_X^{-1}(x) \cong Y$

Esempi di $f: X \to Y$ con $y_0 \in Y$ e

$\dim f^{-1}(y_0) > n-m$.

Quasi-esempi (f dominante ma non suriettiva)

i) $f: \mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{A}^2$

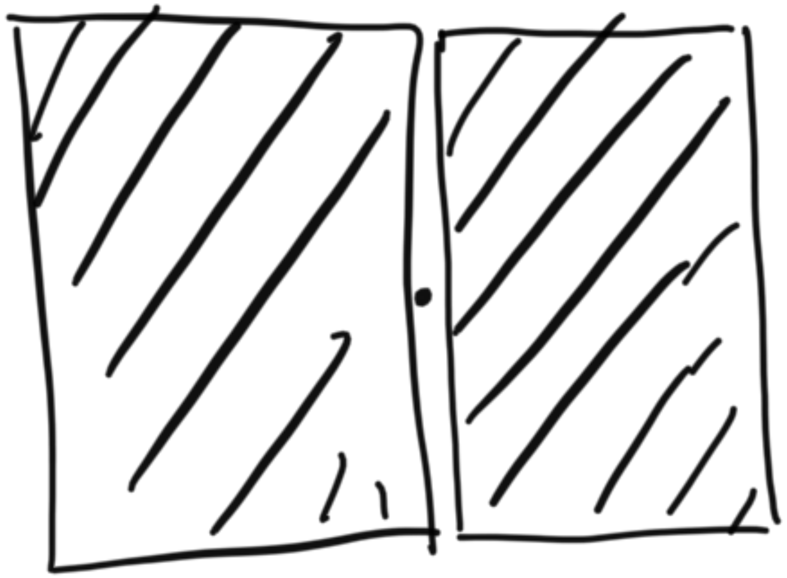
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ xy \end{pmatrix}$$

$$f(\mathbb{A}^2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{A}^2, \ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \end{pmatrix} \text{ con } \gamma \neq 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{A}^2, \ \alpha \neq 0 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$f^{-1}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha^{-1}\beta \end{pmatrix} \right\}$ se $\alpha \neq 0$ $\qquad \dim f^{-1}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$ se $\alpha \neq 0$

$$f^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix} \;\; y\in\mathbb{K} \right\} \qquad \dim f^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 1$$

$I(\mathbb{A}^2)$  $\subseteq \mathbb{A}^2$

Più in generale, se $A(t)$ è una matrice $n\times n$ coefficienti polinomi nella variabile t

$$f: \mathbb{A}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{A}^{n+1}$$

$$\begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \det(A(t)) \\ A(t)\cdot \vec{x} \end{pmatrix}$$

è un polinomio in t

Nell' esempio precedente $n = 1$ $\quad A(t) = t$

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} t \\ tx \end{pmatrix}$$

Un esempio vero

$$X \subseteq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^2 \longleftarrow \text{punti di } \mathbb{K}^2$$

$\uparrow$

rette di $\mathbb{K}^2$

$$X = \{ (\ell, p) \; : \; p \in \ell \}$$

$\ell \leftrightarrow [x : y]$ $\qquad p \in \ell \iff \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ è lin. dip. da $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$p \longleftrightarrow (z : w)$

$$\iff \det \begin{pmatrix} z & x \end{pmatrix} = 0 \iff zy - xw = 0$$

$\iff \det\begin{pmatrix} & \\ w & y \end{pmatrix} = 0 \iff ty - xw = 0$

X è varietà quasi-proiettiva

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend left, "\psi"] \arrow[dr, bend right, "\varphi"'] & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^2 \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"] & \mathbb{A}^2 \\
 & \mathbb{P}^1 &
\end{tikzcd}$$

$\psi : X \longrightarrow \mathbb{A}^2$ è regolare

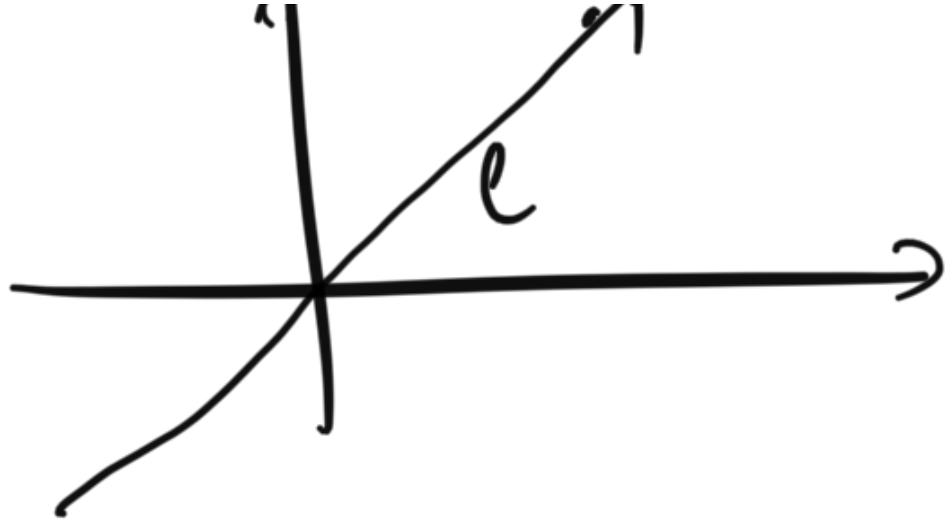
ψ è suriettiva?

$$\psi^{-1}(p) = \{(l,p) : p \in l\} \cong \{l \in \mathbb{P}^1 : l \ni p\}$$

Ogni punto p di $\mathbb{A}^2$ appartiene almeno a una retta

$\Rightarrow \psi$ è suriettiva.

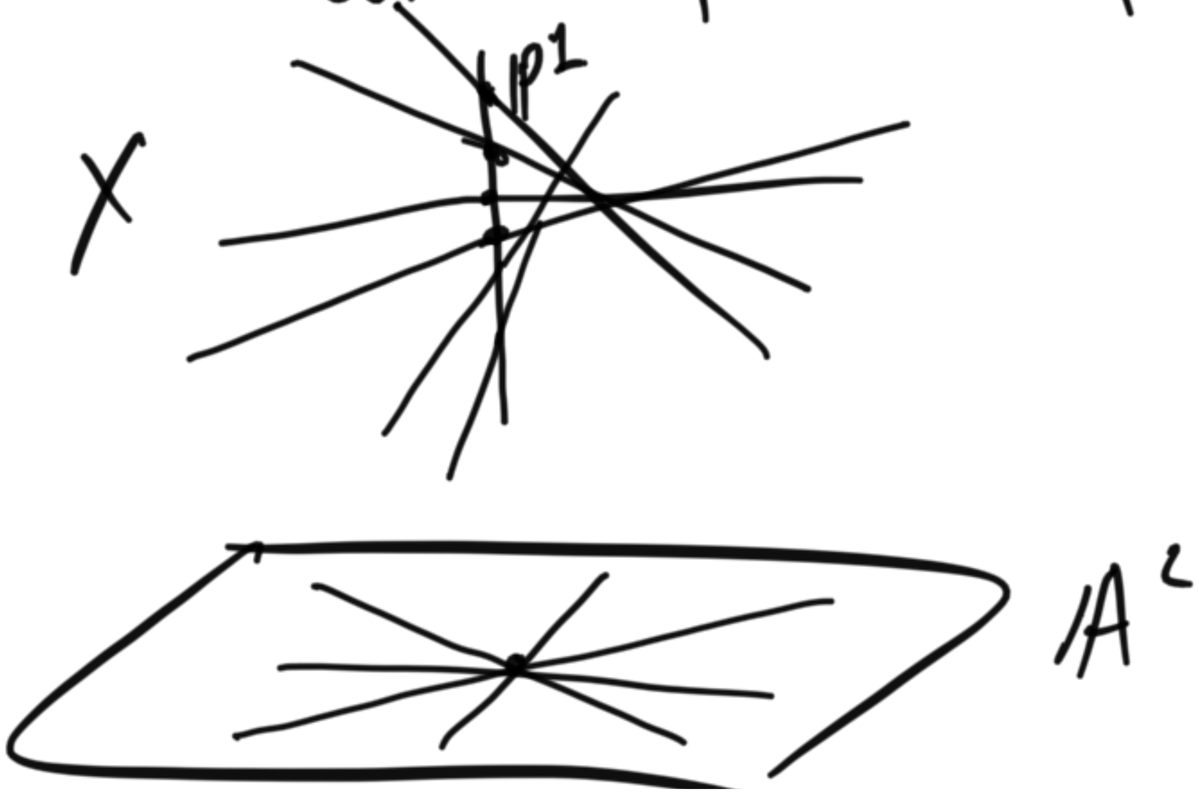
Se $p \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$



$\exists!\ \ell$ con $\ell \ni p$

$\dim \varphi^{-1}(p) = 0$ se $p \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

Se $p = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $\forall\ \ell$ retta di $\mathbb{A}^2$ (per l'origine) contiene p. $\Rightarrow \varphi^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \mathbb{P}^1 \Rightarrow \dim \varphi^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 1$



Problema: Sia $\{f=0\}$ una superficie di grado m in $\mathbb{P}^3$ ($f(t^0,t^1,t^2,t^3)$ polinomio omogeneo di grado m)

Ci chiediamo: f contiene una retta di $\mathbb{P}^3$?

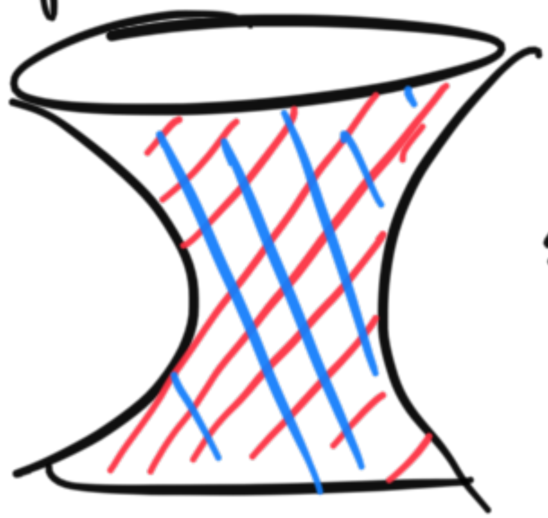
Se sì, quante ne contiene? (numero finito? quante? un numero infinito?)

Se $m=1$ ci stiamo chiedendo se un piano in $\mathbb{P}^3$ contiene rette. Sì, infinite

Detto meglio: le rette proiettive in $\mathbb{P}^2$ sono $Gr(2;3)$. Ha $\dim\left\{\begin{pmatrix}1 & 0 & x\\ 0 & 1 & y\end{pmatrix}\right\}=2$

Se $n=2$ ci stiamo chiedendo se una quadrica Q di $\mathbb{P}^3$ contenga rette

Se Q è irriducibile



$\cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

Q contiene infinite rette

più precisamente contiene

due famiglie ognuna delle quali ha dimensione 1.

Se Q è riducibile $\Rightarrow$ Q è unione di due piani $\Rightarrow$ Q contiene due famiglie bidimensionali di rette.

$n \geq 3$?

$(V(F), \ell)$ $\quad$ $V(F)$ superficie di grado m in $\mathbb{P}^3$

ℓ retta in $\mathbb{P}^3$

$$\{V(F) \text{ di grado } m\} \cong \mathbb{P}^N$$

$$\| $$

$$\mathbb{P}(\{F \text{ polinomio omogeneo di grado } m \text{ in } t^0, t^1, t^2, t^3\})$$

Una base di $\{F$ polinomi omog di grado m in $t^0 \dots t^3\}$

sono $(t^0)^{d_0}(t^1)^{d_1}(t^2)^{d_2}(t^3)^{d_3}$ con $d_0+d_1+d_2+d_3 = m$

$m+3$ scatole

restano m scatole divise in 4 gruppi

$$\mathbb{P}\left(\mathbb{K}^{\binom{m+3}{3}}\right) = \mathbb{P}^N \quad ; \quad N = \binom{m+3}{3} - 1$$

$$= \frac{(m+3)(m+2)(m+1)}{6} - 1$$

Lo spazio di tutte le rette in $\mathbb{P}^3$

è $Gr(2;4) \subseteq \mathbb{P}^5$; $\{[p^{01}:p^{02}:p^{03}:p^{12}:p^{13}:p^{23}] : p^{01}p^{23} - p^{02}p^{13} + p^{03}p^{12} = 0\}$

$$X_m = \{(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{superf} \\ \text{di grado} \\ m}}{F}, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{retta}}}{\ell}) : \ell \subseteq F\} \subseteq \mathbb{P}^N \times Gr(2;4)$$

i) X_m è varietà proiettiva?

ii) X_m è irriducibile?

ℓ retta in $\mathbb{P}^3 \leftrightarrow \ell$ è un piano V di $\mathbb{K}^4$

sia $\{v, w\}$ una base di V; ogni punto di V

è della forma $\alpha v + \beta w$ per qualche $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

$\ell \subseteq F \iff F(\alpha v + \beta w) \equiv 0 \quad \forall \alpha, \beta$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad \exists! \ \varphi : V \to \mathbb{K}$ lineare t.c.

$\varphi(v) = -\beta \quad ; \quad \varphi(w) = \alpha$

$\alpha v + \beta w = \varphi(w) \cdot v - \varphi(v) \cdot w$ per un unico $\varphi \in V^*$.

$\{\vec{x} \in V\} = \{\varphi(w) \cdot v - \varphi(v) \cdot w \mid \varphi \in V^*\}$

Siano $(a_0, a_1 \dots a_3)$ le coordinate di φ

ovvero $\varphi(t^0 \dots t^3) = a_0 t^0 + a_1 t^1 + \dots a_3 t^3 = a_i t^i$

$$v = \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \qquad w = \begin{pmatrix} w^0 \\ w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(w) \cdot v - \varphi(v) \cdot w = a_i w^i \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} - a_i v^i \begin{pmatrix} w^0 \\ w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_i (v^0 w^i - v^i w^0) \\ a_i (v^1 w^i - v^i w^1) \\ a_i (v^2 w^i - v^i w^2) \\ a_i (v^3 w^i - v^i w^3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i p^{0i} \\ a_i p^{1i} \\ a_i p^{2i} \\ a_i p^{3i} \end{pmatrix}$$

$$\ell \in F \iff F(a_i p^{0i}, a_i p^{1i}, \dots a_i p^{3i}) \equiv 0 \quad \forall a_0, a_1, a_2, a_3$$

$\to$ i coeff. di $F(a_i p^{0i} \dots a_i p^{3i})$ come polinomio in $a_0, a_1 \dots a_3$ sono tutti nulli.

Questi sono polinomi omogenei nei coeff di F e in p^{ij}.

$$\begin{tikzcd} X_m \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & \mathbb{P}^N \\ Gr(2;4) & \end{tikzcd}$$

φ e ψ sono regolari

ψ è suriettiva!

$$\psi^{-1}(\ell) = \{F \text{ di grado } m \text{ t.c. } \ell \subseteq V(F)\}$$

$$= \{F \text{ di grado } m \text{ t.c. } F|_\ell \equiv 0\}$$

$\forall \ell \quad \exists$ un piano ($\exists$ G di grado 1 t.c. $G|_\ell \equiv 0$)
contenente ℓ

$F = G^m$ è un polinomio non nullo di grado m
che si annulla identicamente su ℓ.

$\varphi^{-1}(\ell) = ?$

$\varphi^{-1}(\ell)$ è uno spazio proiettivo!

$$\varphi^{-1}(\ell) = \mathbb{P}\left(\left\{ F \text{ omogenei di grado } m \text{ con } F|_\ell \equiv 0 \right\}\right)$$

In particolare $\varphi^{-1}(\ell)$ è irriducibile.

$\dim \varphi^{-1}(\ell) = ?$ A meno di un cambio di coordinate
possiamo assumere che ℓ abbia equazioni $\begin{cases} t^0 = 0 \\ t^1 = 0 \end{cases}$

$$F(t^0,t^1,t^2,t^3) = t^0 G(t^0,t^1,t^2,t^3) + t^1 H(t^1,t^2,t^3) + K(t^2,t^3)$$

$$F(0,0,t^2,t^3) \equiv 0 \Rightarrow K(t^2,t^3) \equiv 0$$

$$F \supseteq \ell \iff F = t^0 G + t^1 H$$

omogen di grado $m-1$ in $t^0,\dots t^3$

omog di grado $m-1$ in t^1,t^2,t^3

$$\dim(\{G\}) = \binom{m-1+3}{3} \quad ; \quad \dim(\{H\}) = \binom{m-1+2}{2}$$

$$\Rightarrow \dim(\{F \supseteq \ell\}) = \binom{m+2}{3} + \binom{m+1}{2}$$

$$\Rightarrow \dim \psi^{-1}(\ell) = \dim \mathbb{P}(\{F \supseteq \ell\}) = \binom{m+2}{3} + \binom{m+1}{2} - 1$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\parallel}$$

$\Rightarrow$ hanno tutte la stessa dimensione!

$$\frac{(n+5)(n+1)n}{6} - 1$$

$\Rightarrow$ X_n è irriducibile!

$\varphi : X_n \longrightarrow Gr(2;4)$ è regolare suriettiva tra varietà proiettive irriducibili

Sia $d = \dim X_n$. $\exists\, U$ aperto di $Gr(2;4)$ non vuoto t.c. $\forall\, l \in U$, $\dim \varphi^{-1}(l) = d - \dim Gr(2;4) = d-4$

Abbiamo visto che $\dim \varphi^{-1}(l) = \dfrac{(n+5)(n+1)n}{6} - 1$

$$d = \dim X_n = \frac{(n+5)(n+1)n}{6} + 3$$

$$\varphi : X_m \longrightarrow \mathbb{P}^N$$

$\varphi(X_m)$ è una sottovarietà proiettiva di $\mathbb{P}^N$

$\dim X_m \geq \dim \varphi(X_m)$

$\dim \varphi(X_m) \leq \dim \mathbb{P}^N$

Quindi se $\dim X_m < \dim \mathbb{P}^N$

Allora $\dim \varphi(X_m) < \dim \mathbb{P}^N \Rightarrow \varphi(X_m) \subsetneq \mathbb{P}^N$

In altre parole, per tutti i punti $[F]$ di $\mathbb{P}^N$

che stanno nell'aperto $\mathbb{P}^N \setminus \varphi(X_m)$ (aperto non vuoto e quindi denso, si ha $\Psi([F]) = \emptyset$

$$\{ \ell \subseteq \mathbb{P}^3 : \ell \subseteq V(F) \}$$

$\Rightarrow$ [Se $\dim X_m < \dim \mathbb{P}^N \Rightarrow$ per quasi ogni F di grado m, $V(F)$ non contiene alcuna retta]

$$\dim X_m = \frac{(m+1)(m^2+5m)}{6} + 3$$

$$\dim \mathbb{P}^N = \frac{(m+1)(m^2+5m+6)}{6} - 1$$

$$\dim X_m - \dim \mathbb{P}^N < 0$$

$$\iff \frac{(m+1)(-\cancel{6})}{\cancel{6}} + 3 + 1 < 0$$

$$\iff -m \cancel{-1} + 3 \cancel{+1} < 0$$

$$\iff \boxed{m > 3}$$

In conclusione: se $m > 3$ la generica superficie di grado m in $\mathbb{P}^3$ non contiene nessuna retta.

Resta da esaminare il caso $m = 3$

In questo caso, $\dim X_3 = \dim \mathbb{P}^N = 19$

$\varphi : X_3 \longrightarrow \mathbb{P}^N$ è una mappa regolare tra varietà proiettive della stessa dimensione.

Se considero la superficie cubica

$F_0 : xyz - w^3 = 0$ $\quad \mathbb{P}^3$ coordinate $[x:y:z:w]$

questa superficie contiene esattamente tre rette

(al finito non ne contiene nessuna e nel $\mathbb{P}^2$

all'infinito $\{w=0\}$ contiene le tre rette

$x=0; \quad y=0; \quad z=0$)

$$\dim \varphi^{-1}([F_0]) = 0$$

Sia $d = \dim \varphi(X_3) \subseteq \mathbb{P}^N$ $\dim 19 \Rightarrow d \leq 19$

$\varphi : X \longrightarrow \varphi(X_3)$

$\varphi : X_3 \to \varphi(X_3)$ regolare e suriettiva

$\Rightarrow$ $\min \dim \varphi^{-1}([F])$ con $[F] \in \varphi(X_3)$ è $19 - d$.

$$\Rightarrow \quad 0 \geq \min_{[F] \in \varphi(X_3)} \dim \varphi^{-1}([F]) = 19 - d$$

$\Rightarrow$ $d \geq 19$

$\Rightarrow$ $d = 19$.

$\varphi(X_3)$ è una sottovarietà chiusa di dim 19 di $\mathbb{P}^{19}$, che è irriducibile.

$\Rightarrow$ $\varphi(X_3) = \mathbb{P}^{19}$ ovvero φ è suriettiva!

$$\varphi : X_3 \longrightarrow \mathbb{P}^{19}$$

$\Rightarrow$ Ogni superficie cubica in $\mathbb{P}^3$ contiene delle rette. Genericamente una superficie cubica ne contiene un numero finito.