X varietà affine irriducibile

$\Rightarrow X$ birazionale a ipersuperficie

ovvero $\quad K(X) \cong K(z^1, \dots z^d, z^{d+1}) \cong K(Z)$

$f(z^1, \dots z^{d+1}) = 0$

Z è l'ipersuperficie $V(f)$

$X \subseteq \mathbb{A}^n(K)$

$K(X)$ sono le funzioni razionali su X

$K[\mathbb{A}^n] = \mathbb{K}[t^1, \dots t^n] \rightarrow$ ogni funzione razionale su X è in particolare una funzione razionale nelle variabili $t^1 \dots t^n$. $\quad K(X) \subseteq \mathbb{K}(t^1, \dots t^n)$

Scegliamo i $t^1 \dots t^n$ un insieme di funzioni t^i tali che $K(t^{i_1}|_x \dots t^{i_d}|_x)$ abbia grado di trascendenza massimo. Supponiamo per semplicità che siano le prime d. $K(t^1|_x \dots t^d|_x)(t^{d+1}|_x \dots t^n|_x)$

algebrici sulle precedenti

$$\begin{matrix} K(t^1|_x \dots t^n|_x) \\ \cup\!\!\mid \\ K(t^1|_x \dots t^d|_x) \end{matrix} \quad \text{è un'estensione algebrica.}$$

Teorema dell'elemento primitivo $\exists\ \alpha = \alpha_1 t^1|_x + \dots + \alpha_d t^d|_x$

t.c. $K(t^1|_x \dots t^n|_x) = K(t^1|_x \dots t^d|_x, \alpha)$

α è algebrico su $K(t^1|_x \dots t^d|_x)$

$\exists\ f_0 : \quad f_0(\alpha) = 0 \qquad f_0 \in K(t^1|_x \dots t^d|_x)[x]$

$\exists \; f(t^1 \dots t^d, x) \quad$ t.c. $\quad f(t^1|_X \dots t^d|_X, \alpha) = 0$

$$z^1 = t^1 \quad \dots \quad z^d = t^d, \quad z^{d+1} = \alpha_1 t^1 + \dots \alpha_n t^n$$

$$f(z^1 \dots z^d, z^{d+1})\Big|_X \equiv 0$$

$$K(X) = K(z^1 \dots z^d, z^{d+1}) \big/ (f)$$

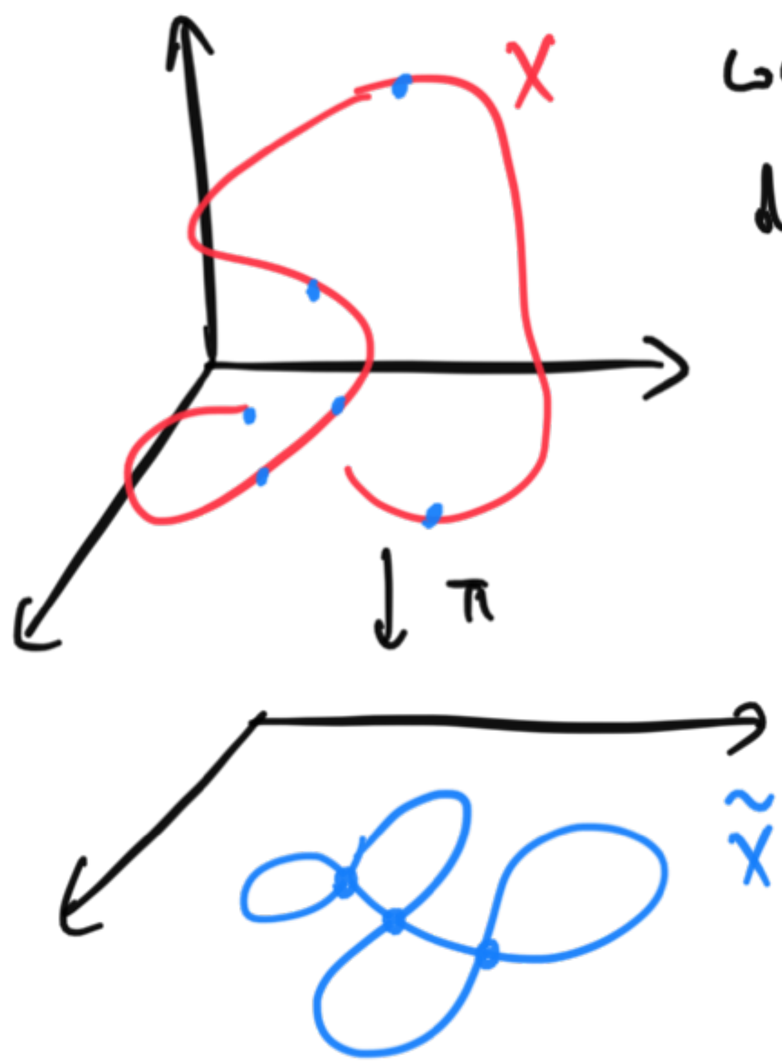
$$\begin{pmatrix} t^1 \\ \vdots \\ t^n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} z^1 \\ \vdots \\ z^{d+1} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^{d+1} \quad \text{lineare}$$

la posso identificare ad una proiezione su un sottospazio $d+1$ dimensionale di $\mathbb{A}^n$.

Es $n=3$ facciamo un disegno reale

$\mathbb{A}^3$



$\mathrm{codim}(X) = 2$ $\mathrm{codim}(\tilde{X}) = 1$ $\tilde{X} \subseteq \mathbb{A}^2$

$\dim(X) = 1 \rightsquigarrow \dim(\tilde{X}) = 1$

Chiusi dello spazio proiettivo

(varietà proiettive)

V spazio vettoriale $\mathbb{P}(V) = \{$ sottospazi di V

di dim $1\}$

$$\mathbb{P}(V) = V \setminus \{0\} \big/ \mathbb{K}^*$$

Se $V = \mathbb{K}^{n+1}$ scriviamo $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ per $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$

$f \in \mathbb{K}[x^0, \dots x^n]$ $(x^0 \dots x^n)$ coordinate su $\mathbb{K}^{n+1}$

$P \in \mathbb{P}^n$. Cosa intendiamo con $f(P) = 0$?

P è una $\underbrace{\text{retta}}_{r_P}$ in $\mathbb{K}^{n+1}$. Con $f(P) = 0$ intendiamo

$$f\big|_{r_P} \equiv 0$$

Se $\vec{x}$ è una base per r_P (ovvero $\vec{x}$ rappresenta il punto P di $\mathbb{P}^n$ in $\mathbb{K}^{n+1}$)

$$P = [x^0 : x^1 : \dots : x^n]$$

$$\vec{x} = (x^0, x^1 \dots x^n)$$

$$r_P = \lambda \vec{x} = (\lambda x^0, \lambda x^1 \dots \lambda x^n) \qquad \lambda \in \mathbb{K}$$

$$f\big|_{r_P} \equiv 0 \iff f(\lambda x^0, \lambda x^1 \dots \lambda x^n) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

Se $\quad f = f_0 + f_1 + \dots + f_d$

componente omogenea di grado 0

componente di grado 1 - -

$$f(\lambda x^0, \dots \lambda x^n) = f_0(x^0 \dots x^n) + \lambda f_1(x^0 \dots x^n)$$
$$+ \lambda^2 f_2(x^0 \dots x^n) + \dots \lambda^d f_d(x^0 \dots x^n)$$

Il polinomio $P_f(t) = f_0(x^0 \dots x^n) + f_1(x^0 \dots x^n)t + \dots f_d(x^0 \dots x^n)t^d$

si annulla $\forall \lambda \Rightarrow$ ha infinite radici $\Rightarrow P_f(t) \equiv 0$

$$f_i(x^0 \dots x^n) = 0 \quad \forall i$$

$$f_i(x^0 \dots x^n) = 0 \iff \underset{\lambda^i f_i(x^0 \dots x^n)}{\underset{\parallel}{f_i(\lambda x^0 \dots \lambda x^n)}} = 0 \ \forall \lambda \iff f_i(P) = 0$$

Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n$

sottoinsieme

$I_X = \{ f \in \mathbb{K}[x^0 \dots x^n] : f(P) = 0 \}$

I_X è un ideale

Se $f \in I_X \Rightarrow f_i$ (componente omogenea di grado i)

$\begin{array}{c} f_i \\ \cap \\ I_X \end{array}$

Def: J ideale di $\mathbb{K}[x^0 \dots x^n]$ si dice omogeneo

se $f \in J \Rightarrow f_i \in J \quad \forall i$

Oss: J omogeneo $\Leftrightarrow$ J ha un sistema di generatori omogenei

J omogeneo. J in particolare è un ideale di $\mathbb{K}[x^0 \dots x^n]$

$$J = (f, g, h \dots)$$

$$f_i \in J \quad , g_i \in J \quad , h_i \in J \dots$$

$$(f_0, f_1 \dots \quad , g_0, g_1, \dots \; h_0, h_1, \dots) \subseteq J$$

$$f \in (f_0 \dots f_{d_f}) \qquad g \in (g_0 \dots g_{d_g}) \dots$$

$$J \subseteq (f_0, f_1 \; \cdot g_0, g_1 \;)$$

$$J = (\underbrace{f_0, f_1 \dots \; g_0, g_1 \dots}_{\text{sistema omogeneo di generatori}} \;)$$

Viceversa

$$J = (f, g, h \dots \;) \qquad f, g, h \text{ omogenei}$$

$\varphi \in)$ $\quad \varphi = a(\vec{x}) \cdot f + b(\vec{x}) \cdot g + \dots$

t.H.
concentrato
in un certo grado

$a = a_0 + a_1 + \dots a_d$

$b = b_0 + b_1 + \dots b_p \dots$

$\varphi = a_0 f + a_1 f + a_2 f + \dots b_0 g + b_1 g + \dots$

omogenei

$a_i f \in J, \quad b_j g \in J \dots$

$\varphi_k \in J$

Varietà $\longrightarrow$ Ideali omogenei proiettive $\longleftarrow$ ideali omogenei

$\uparrow$

chiusi di una topologia su $\mathbb{P}^n$

$U \subseteq \mathbb{P}^n$ è aperto se $U = \mathbb{P}^n \setminus X$ $\quad X$ chiuso

$(X = V(I))$

$$\mathbb{A}^n_i \subseteq \mathbb{P}^n$$

$$\{[x^0 : \dots \; x^n] : x^i \neq 0\} = \mathbb{P}^n \setminus \{V(x^i)\}$$

$\uparrow$

polinomio omogeneo di grado 1 in $x^0 \dots x^n$

$\mathbb{P}^n$ è coperto da $n+1$

aperti affini (copie di $\mathbb{A}$)

Nullstellensatz proiettivo

Caso affine. $\sqrt{J} = I_{V(J)}$

Corollario $\Rightarrow \left[V(J) = \emptyset \iff J = (1) = \mathbb{K}[x^0 \dots x^n] \right]$

dim: $J = (1) \Rightarrow 1 \in J \Rightarrow V(J) \subseteq V(1) = \emptyset$

$$V(J) = \emptyset \Rightarrow \sqrt{J} = I_\emptyset = \{ f : \emptyset \subseteq V(f) \}$$
$$= \mathbb{K}[x^0 \dots x^n] = (1)$$

$$\Rightarrow 1 \in \sqrt{J} \Rightarrow 1 = 1^r \in J \Rightarrow (1) \subseteq J \subseteq (1).$$

In $\mathbb{P}^n$ non è vero!

Esempio $\mathbb{P}^1$

$J = (x,y)$ $\qquad V(J) \subseteq \mathbb{A}^2$

$\quad\;\; = I_1 \qquad\qquad = \{(0,0)\}$ ← non definisce nessun punto in $\mathbb{P}^1$!

$V(x,y)_{\mathbb{P}^1} = \emptyset$

$J = (x, y^2)$; $J = (x^2, y^2)$; $J = (x^2, xy, y^2) \ldots$

x^2, xy, y^2 $\qquad x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4$ $\qquad = I_2$

$I_2 \subseteq J$ $\qquad I_4 \subseteq J$

I_k = ideale generato da tutti i monomi omogenei di grado k

$V(J) = \emptyset \iff I_k \subseteq J$ per qualche k

Oss: $I_k \subseteq J$ per qualche $k \iff \exists\ \alpha_0, \dots, \alpha_n \quad \alpha_i > 0$

t.c. $(x^i)^{\alpha_i} \in J$

Se $I_k \subseteq J \Rightarrow (x^0)^k \in J, (x^1)^k \in J \dots \quad \alpha_i = k \ \forall i$

Se $(x^0)^{\alpha_0} \in J, (x^1)^{\alpha_1} \in J \dots$

sia $k = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots \alpha_n$

Sia $(x^0)^{d_0} (x^1)^{d_1} \dots (x^n)^{d_n}$ monomio omogeneo di grado K

Se $d_i < \alpha_i \quad \forall i$

$k = d_0 + d_1 + \dots d_n < \alpha_0 + \alpha_1 + \dots \alpha_n = K$ il che è assurdo

$$\exists\ i_0 : d_{i_0} \geq \alpha_{i_0} \Rightarrow (x^0)^{d_0} \cdots (x^n)^{d_n} = \underset{\substack{\uparrow \\ J}}{(x^{i_0})^{\alpha_{i_0}}} \cdots$$

$$\Rightarrow I_n \subseteq J .$$

Se $J \supseteq I_n \Rightarrow V(J)_{\mathbb{P}^n} \subseteq V(I_n)_{\mathbb{P}^n} = \emptyset$

Se $V(J)_{\mathbb{P}^n} = \emptyset$

$$V(J)_{\mathbb{P}^n} \cap \mathbb{A}^n_0 = \emptyset$$

polinomi omogenei in $x^0 \cdots x^n$

Se $J = (F_1, F_2 \ldots F_n)$

$$V(J)_{\mathbb{P}^n} \cap \mathbb{A}^n_0 = V(J^{aff})$$

$V(J)_{\mathbb{P}} \cap U_1 = V(J\ )$

$J^{\mathrm{aff}} = (f_1, \dots, f_k)$ $\qquad f_i(x^1, \dots, x^n) = F_1(1, x^1, \dots, x^n)$

$V(J^{\mathrm{aff}}) = \emptyset \Rightarrow 1 \in (f_1 \dots f_k) \Rightarrow \exists\, g_1(x^1 \dots x^n)$

$\uparrow$ Nullstellensatz affine $\qquad g_k(x^1 \dots x^n)$

t.c. $g_1 f_1 + \dots + g_k f_k = 1$

Siano G_i gli omogeneizzati di g_i

$G_i(x^0 \dots x^n)$ è tale che $G_i(1, x^1, \dots x^n) = g_i(x^1 \dots x^n)$

$G_1(1, x^1 \dots x^n) F_1(1, x^1 \dots x^n) + \dots = 1$

$x^i = \underline{z^i}$

z^0

$$G_1\left(\frac{z^0}{z^0}, \frac{z^1}{z^0}, \dots \frac{z^n}{z^0}\right) F_1\left(\frac{z^0}{z^0}, \frac{z^1}{z^0} \dots \frac{z^n}{z^0}\right) + \dots \equiv 1$$

$$\frac{G_1(z^0, \dots z^n) F_1(z^0 \dots z^n)}{(z^0)^{d_0}} + \dots \equiv 1$$

$$G_1 F_1 + G_2 F_2 + \dots + G_m F_m \equiv (z^0)^{d_0}$$ per un qualche d_0

$$(z^0)^{d_0} \in (F_1(z^0, \dots z^n), F_2(z^0, \dots z^n) \dots)$$

$$(x^0)^{d_0} \in (F_1(x^0 \dots x^n), F_2(x^0 \dots x^n) \dots) = J$$

Segue che $V(\mathfrak{J})_{\mathbb{P}^n} \cap \mathbb{A}^n_0 = \emptyset$

$$\underset{\emptyset}{\overset{}{\underset{\shortparallel}{V(\mathfrak{J})_{\mathbb{P}^n}}}}$$

$$\Rightarrow \quad V(\mathfrak{J})_{\mathbb{P}^n} \cap \mathbb{A}^n_i = \emptyset \quad \forall i \quad \Rightarrow \quad (x^i)^{d_i} \in \mathfrak{J}$$

Varietà Grassmanniane.

$$\{ \text{rette per } 0 \text{ in } V \} \longleftrightarrow \mathbb{P}(V)$$

$$\shortparallel$$

$$\{ \text{sottospazi di dim } 1 \text{ di } V \}$$

$$Gr(k; V) = \{ \text{sottospazi } W \subseteq V \text{ con } \dim W = k \} \qquad k \le \dim V$$

$Gr(1; V) = \mathbb{P}(V)$

Per $K=2$ $Gr(K;V)$ è una varietà proiettiva.

$Gr(K;V)$ è una varietà proiettiva per ogni K

Inoltre $I_{Gr(K;V)}$ è generato da polinomi di grado 2 ($Gr(K;V)$ è intersezione di quadriche)

i) Realizziamo $Gr(K;V)$ come sottoinsieme di $\mathbb{P}(\tilde{V})$ per qualche $\tilde{V}$.

$W \leq V$ $\dim W = K$ voglio associare un vettore non nullo, ben definito a meno di un multiplo scalare, in un qualche spazio vett V.

Sia $\{w_1, \dots w_k\}$ una base di W

$$\lambda_{\vec{w}} = \underbrace{w_1 \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_k}_{\neq 0} \in \Lambda^k V$$

$w_i \in W \subseteq V$

$$\begin{tikzcd}
\left\{ \begin{array}{c} \text{basi dei} \\ \text{sottospazi di} \\ \text{dim } K \end{array} \right\} \arrow[r] \arrow[d, "\text{sottospazio generato}"] & \mathbb{P}(\Lambda^k V) \\
Gr(K;V) \arrow[ur, dashed, "?"'] &
\end{tikzcd}$$

$\tilde{w}_1, \dots \tilde{w}_k$ altra base per W

$\tilde{w}_i \in \operatorname{span}(\{w_i\}) \quad \exists! \quad A \in GL(k;K)$

t.c. $(\tilde{w}_1, \dots \tilde{w}_k) = (w_1, \dots w_k) \cdot A$

$$\Rightarrow \tilde{w}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{w}_k = \det A \cdot w_1 \wedge \dots \wedge w_k$$

$\lambda_{\tilde{w}} = \underset{\neq 0}{\det A} \cdot \lambda_w \Rightarrow \lambda_{\tilde{w}}$ e λ_w definiscono lo stesso punto in $\mathbb{P}(\Lambda^k V)$

$$Gr(k; V) \xrightarrow{\sigma} \mathbb{P}(\Lambda^k V)$$

In coordinate. Sia $\{e_1 \dots e_n\}$ una base di V

$(w_1 \dots w_k) = (e_1 \dots e_n) M_{\{w_i\}} \leftarrow$ Matrice che ha per colonne le coordinate dei w_i nella base $\{e_i\}$

Una base di $\Lambda^k V$ è

$e_{i_1 \dots i_k} = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots e_{i_k}$

$$\lambda_{\vec{w}} = w_1 \wedge \dots \wedge w_k \in \Lambda^k V$$

$\lambda_{\vec{w}}$ ha delle coordinate rispetto alla base $e_{i_1 \dots i_k}$

$M_k \rightsquigarrow$ lista di numeri (coordinate di $\lambda_{\vec{w}}$)

$w_1 = \alpha^1 e_1 + \alpha^2 e_2 \dots + \alpha^n e_n$

$w_2 = \beta^1 e_1 + \dots \quad \beta^n e_n$

coefficienti di M_k

$w_1 \wedge w_2 \wedge \dots = \cancel{\alpha^1 e_1 \wedge \beta^1 e_1} \wedge \dots \qquad \alpha^1 \beta^2 e_1 \wedge e_2 + \dots$

$M_k \longrightarrow$ Tutti i minori $k \times k$ di M

(determinanti dei)

Es $\quad Gr(2;3) = Gr(2;K^3)$

$$w_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$$

$$w_1 \wedge w_2 \longrightarrow \left(\det\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} a & d \\ c & f \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} b & e \\ c & f \end{pmatrix} \right)$$

β è iniettiva

$$\beta(W_1) = \beta(W_2) \overset{?}{\longrightarrow} W_1 = W_2$$

$U = W_1 \cap W_2$

$\{u_1 \dots u_l\}$ base di U

$\{u_1 \dots u_l, w_{l+1} \dots w_k\}$ base di W_1

$\{u_1 \dots u_l, \tilde{w}_{l+1}, \dots \tilde{w}_k\}$ base di W_2

$$\underbrace{\underbrace{\{\overset{e_1}{u_1}\dots \overset{e_l}{u_l}, \overset{e_{l+1}}{w_{l+1}},\dots w_k, \overset{e_{k+1}}{\tilde{w}_{l+1}}\dots \overset{e_{2k-l}}{\tilde{w}_k}}_{\text{base di } W_1+W_2}, z_1\dots \overset{e_m}{z_m}\}}_{\text{base di } V}$$

$\{e_{i_1\dots i_k}\}$ base di $\Lambda^k V$

$$e_{1\dots k} = u_1\wedge u_2 \dots \wedge u_l \wedge w_{l+1} \dots w_k \to \mathbb{P}(W_1)$$

è <u>lin indip</u> da $\qquad \neq$

$$e_{1\dots l,k+1\dots 2k-l} = u_1\wedge \dots u_l \wedge \tilde{w}_{l+1} \dots \wedge \tilde{w}_k \to \mathbb{P}(W_2)$$

$$Gr(k;V) \subseteq \mathbb{P}(\Lambda^k V)$$

Voglio caratterizzare gli elementi $\lambda \in \Lambda^k V$ che si possono scrivere come $\lambda = v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ per opportuni $v_i \in V$. L'insieme di questi λ è $\mathcal{B}(Gras(K;V))$

Un λ di questo tipo lo diciamo <u>decomponibile</u>

Se $0 \neq \lambda$ è decomponibile $\Rightarrow \lambda = v_1 \wedge \dots \wedge v_k$

$W = span\{v_1 \dots v_k\}$ $\lambda \in \Lambda^k W$ $\leftarrow$ $\dim W = K$

Se $\lambda \in \Lambda^k V$ è nell'immagine di $\Lambda^k W \subseteq \Lambda^k V$ con $\dim W = K \Rightarrow \lambda$ è decomponibile

($\dim W = K \Rightarrow W = span\{w_1 \dots w_k\} \Rightarrow \Lambda^k W = \{\alpha\, w_1 \wedge \dots \wedge w_k\}$
$\uparrow$ decomponib.)

$0 \neq \lambda \in \Lambda^k V$ è decomponibile se il più piccolo sottospazio

W di V con la proprietà $\lambda \in \Lambda^k W$ ha dimensione k.

(sottospazi con $\lambda \in \Lambda^k W$ esistono; basta prendere $W = V$; stiamo cercando uno il più piccolo possibile)

Notazione $\lambda^\perp = \{ \varphi \in V^* : i_\varphi(\lambda) = 0 \}$

$i_\varphi(v) = \varphi(v)$

$$i_\varphi(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) = i_\varphi(v_1) \wedge v_2 \wedge \dots v_k - v_1 \cdot i_\varphi(v_2) \wedge v_3 \dots \wedge v_k$$

$$+ v_1 \wedge v_2 \wedge i_\varphi(v_3) v_4 \wedge \dots$$

$$= \sum (-1)^i i_\varphi(v_i) \, v_1 \wedge \dots \hat{v_i} \dots v_k$$

(estendo i_φ come una derivazione di grado -1)

$$\lambda^\perp \subseteq V^*$$

$$\mathrm{Ann}(\lambda^\perp) = \{ v \in V : \varphi(v) = 0 \ \ \forall \varphi \in \lambda^\perp \}$$

Sia $W = \mathrm{Ann}(\lambda^\perp)$

Vale:

i) $\lambda \in \Lambda^k W \qquad (\lambda \in \Lambda^k \mathrm{Ann}(\lambda^\perp))$

ii) W è minima con questa proprietà!

cioè se $\lambda \in \Lambda^k \widetilde{W} \Rightarrow W \subseteq \widetilde{W}$

iii) $\{ i_\omega(\lambda) : \omega \in \Lambda^{k-1} V^* \} = W \subseteq V$

$$\underbrace{\Lambda^{n-1}V^* \qquad \Lambda^n V}_{\in V}$$

Da questo seguirà che λ è decomponibile

$\iff \quad i_\omega(\lambda)\wedge\lambda = 0 \quad \forall\, \omega \in \Lambda^{n-1}V^*$

equazione quadratica in λ!

$\iff \quad i_{\omega_j}(\lambda)\wedge\lambda = 0 \quad \forall\, j = 1 \dots N$

$\{\omega_1 \dots \omega_N\}$ base di $\Lambda^{n-1}V^*$

$$N = \binom{n}{k-1}$$

Es: $k=2 \rightarrow k-1 = 1$

$$i_\varphi(\lambda) \wedge \lambda = 0 \quad \forall\ \varphi \in V^* \qquad \lambda \in \Lambda^2 V$$

i_φ è una derivazione

$$i_\varphi(\lambda \wedge \lambda) = i_\varphi(\lambda) \wedge \lambda + (-1)^2 \lambda \wedge i_\varphi(\lambda) =$$

$$= 2\, i_\varphi(\lambda) \wedge \lambda$$

$$i_\varphi(\lambda) \wedge \lambda = 0 \iff i_\varphi(\lambda \wedge \lambda) = 0 \quad \forall\ \varphi$$

$$\iff \lambda \wedge \lambda = 0$$

$n = 4$ $\qquad (Gr(2,4))$

$Gr(2,4)$

e_1, e_2, e_3, e_4 base di V

$e_{12} \quad e_{13} \quad e_{14} \quad e_{23} \quad e_{24} \quad e_{34}$ base di $\Lambda^2 V$

$$\lambda = p^{12} e_{12} + p^{13} e_{13} + \dots = p^{ij} e_{ij}$$

$$\lambda \wedge \lambda = 2\left(p^{12}p^{34} - p^{13}p^{24} + p^{14}p^{23}\right) e_{1234}$$

$$\lambda \wedge \lambda = 0 \iff p^{12}p^{34} - p^{13}p^{24} + p^{14}p^{23} = 0$$

quadrica in $\mathbb{P}^5$