$\lambda \in \Lambda^k V$

$\lambda^\perp = \{ \varphi \in V^* : i_\varphi(\lambda) = 0 \} \subseteq V^*$

$W = \mathrm{Ann}(\lambda^\perp) = \{ v \in V : \varphi(v) = 0 \ \forall \varphi \in \lambda^\perp \} \subseteq V$

i) $\lambda \in \Lambda^k W$

ii) W è il più piccolo sottospazio di V con questa proprietà

iii) $W = \{ i_\omega(\lambda) , \omega \in \Lambda^{k-1} V^* \} = \mathrm{Im}\left(i_{-}(\lambda) : \Lambda^{k-1} V^* \to V \right)$

$\omega \in \Lambda^{k-1} V^* \quad i_\omega : \Lambda^k V \longrightarrow V \qquad \Lambda^{k-1}V^* \subseteq V$

<u>Dim</u>: i) $\varphi_1, \dots \varphi_l$ base di $\lambda^\perp \subseteq V^*$

$\varphi_1 \dots \varphi_l, \psi_1, \dots \psi_j$ base di V^*

$z_1 \dots z_l, w_1 \dots w_j$ base duale (base di V)

$\varphi_1(z_1) = 1$; $\varphi_1(z_i) = 0,\ i \neq 1$; $\varphi_a(z_1) = 0\ \forall a$

- - -

$w_1 \dots w_j \in W = \mathrm{Ann}(\lambda^\perp)$

$\varphi(w_i) = 0 \quad \forall \varphi \in \lambda^\perp \quad \forall i = 1 \dots j$

$\Updownarrow$

$\varphi_\alpha(w_i) = 0 \quad \forall\ \varphi_\alpha \in \{\varphi_1 \dots \varphi_\ell\} \quad \forall w_i \in \{w_1 \dots w_j\}$

$\uparrow$ per costruzione

$\mathrm{Span}(w_1 \dots w_j) \subseteq W$

dimostriamo ora che $\mathrm{Span}(w_1 \dots w_j) = W$

$\dim(\mathrm{Span}(w_1 \dots w_j)) = j$ in quanto $w_1 \dots w_j$ fa parte di una base di V $\rightarrow$ linearmente indipendenti

$\dim W = \dim \mathrm{Ann}(\lambda^\perp) = \dim V - \dim \lambda^\perp = \dim V - \ell = j$

$\rightarrow \{w_1 \dots w_j\}$ basi di W

Sia $U = \operatorname{span}(z_1 \dots z_\ell) \subseteq V$

$$V = W \oplus U$$

$$\Lambda^k V = \Lambda^k W \oplus \Lambda^{k-1} W \otimes U \oplus \Lambda^{k-2} W \otimes \Lambda^2 U \oplus \dots$$

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots$$

Voglio mostrare $\lambda_i = 0$ per $i \geq 1 \longrightarrow \lambda = \lambda_0 \in \Lambda^k W$

ι_{φ_i} $\quad i_{\varphi_i}(w_{i_1} \wedge \dots w_{i_m} \wedge u_{j_1} \dots u_{i_r}) = w_{1} \wedge \dots \wedge w_{i_m} \wedge i_{\varphi_i}(\vec{u})$

$$i_{\varphi_i}(\vec{w} \wedge \vec{u}) = \cancel{i_{\varphi_i}(\vec{w}) \wedge \vec{u}} \pm \vec{w} \wedge i_{\varphi_i}(\vec{u})$$

$$\Lambda^k W \oplus \Lambda^{k-1} W \otimes U \oplus \Lambda^{k-2} W \otimes \Lambda^2 U \oplus \dots$$

i_{φ_i}

φ_1

$$0 \oplus \Lambda^{k-1} W \oplus \Lambda^{k-2} W \otimes V \oplus \Lambda^{k-3} W \otimes \Lambda^2 V \oplus \cdots$$

$i_{\varphi_i}(\lambda_0)$ $\quad i_{\varphi_i}(\lambda_1)$ $\quad i_{\varphi_i}(\lambda_2)$ $\quad i_{\varphi_i}(\lambda_3)$

$$i_{\varphi_i}(\underbrace{w_1 \dots \wedge w_{k-1}}_{\text{lin indip}} \wedge u) = 0 \longleftrightarrow \underset{\neq 0}{\vec{w}_{(k-1)}} \cdot i_{\varphi_i}(u) = 0$$

$$i_{\varphi_i}(u) = 0 \longleftrightarrow \varphi_i(u) = 0$$

$$i_{\varphi_i}(u) = 0 \quad \forall \varphi_i$$

$\rightarrow u = 0 \quad (u = \alpha^i z_i \; ; \; \varphi_i(u) = \alpha^i$

$\Rightarrow \varphi_i(u) = 0 \; \forall i \rightarrow \alpha^i = 0 \; \forall i$

$\rightarrow u = 0 \;)$

Analogamente $\quad i_{\varphi_i}(\vec{w}_{(k-2)} \wedge \vec{u}_{(2)}) = 0 \quad \forall i$

$\Rightarrow \vec{u}_{(2)} = 0 \quad \dots$

$$0 = i_{\varphi_i}(\lambda) = \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{i_{\varphi_i}(\lambda_0)} + \underset{\substack{\cap \\ \Lambda^{k-1} W}}{i_{\varphi_i}(\lambda_1)} + \underset{\substack{\cap \\ \Lambda^{k-2} W \otimes U}}{i_{\varphi_i}(\lambda_2)} + \dots$$

$$i_{\varphi_i}(\lambda_m) = 0 \quad \forall m \quad \forall i$$

Per $m \geq 1$ questo implica $\lambda_m = 0$

$$\Rightarrow \lambda = \lambda_0 \in \Lambda^k W$$

ii) Sia $W_0 \subseteq V$ t.c. $\lambda \in \Lambda^k W_0$

Voglio mostrare che $W \subseteq W_0$, ovvero che $\mathrm{Ann}(\lambda^\perp) \subseteq W_0$, il che equivale a $\mathrm{Ann}(W_0) \subseteq \lambda^\perp$ ovvero voglio mostrare che

Se $\varphi \in Ann(W_0)$ allora $i_\varphi(\lambda) = 0$

$\forall w \in W_0$ $\qquad$ $\lambda \in \Lambda^k W_0$

$\varphi(w) = 0$ $\qquad$ $\lambda = \alpha w_1 \wedge \dots w_k + \beta \tilde{w}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{w}_k$

$i_\varphi(w) = 0$ $\qquad$ $+ \gamma \hat{w}_1 \wedge \dots \hat{w}_k + \dots$

$w_i, \tilde{w}_i, \hat{w}_i \dots \in W_0$

$$i_\varphi(\lambda) = \sum \dots i_\varphi(w_i) \dots + \dots i_\varphi(\tilde{w}_i) \dots$$
$$+ \dots i_\varphi(\hat{w}_i) \dots$$
$$= 0$$

$\varphi \in \lambda^\perp$

iii) $\{ i_\omega(\lambda) \, ; \, \omega \in \Lambda^{k-1} V^* \} = Ann(\lambda^\perp)$

è equivalente a

$Ann(\{ i_\omega(\lambda) \, ; \, \omega \in \Lambda^{k-1} V^* \}) = \lambda^\perp$

$\mathrm{Ann}(\{ i_\omega(\lambda) \,;\, \omega \in \Lambda \;\; V \}) = \ldots$

$\varphi \in \lambda^\perp \overset{?}{\rightarrow} \varphi \in \mathrm{Ann}(\{ i_\omega(\lambda) \})$

$\varphi \in \mathrm{Ann}(\{ i_\omega(\lambda) \}) \overset{?}{\rightarrow} \varphi \in \lambda^\perp$

Sia $\varphi \in \lambda^\perp \leftarrow i_\varphi(\lambda) = 0$

$\forall\, \omega \in \Lambda^{k-1} V^*$

$$\underset{\substack{\cap \\ V^*}}{\varphi}\Big(\underset{\substack{\cap \\ V}}{i_\omega(\lambda)} \Big) = i_\varphi(i_\omega(\lambda)) = i_{\varphi\wedge\omega}(\lambda) = \pm\, i_{\omega\wedge\varphi}(\lambda)$$

$$= \pm\, i_\omega(\underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{i_\varphi(\lambda)}) = 0$$

$\rightarrow \varphi \in \mathrm{Ann}(\{ i_\omega(\lambda) \})$

Sia $\varphi \in \mathrm{Ann}(\{ i_\omega(\lambda) \})$

$\varphi \in \mathrm{Ann}(i_\omega(\lambda)) \;\; \forall\, \omega \in \Lambda^{k-1} V^*$

$$\varphi(i_\omega(\lambda)) = 0 \quad \forall \omega$$

$$i_\varphi(i_\omega(\lambda)) = 0 \quad \forall \omega$$

$$i_\omega(i_\varphi(\lambda)) = 0 \quad \forall \omega \in \Lambda^{k-1}V^* = (\Lambda^{k-1}V)^*$$

$$\Lambda^{k-1}V^* \qquad \Lambda^{k-1}V$$

$$\to \quad i_\varphi(\lambda) = 0$$

$$\to \quad \varphi \in \lambda^\perp$$

$W = \mathrm{Ann}(\lambda^\perp)$ è il più piccolo sottosp di V con $\lambda \in \Lambda^k W$

Caratterizziamo adesso in termini di W la proprietà di λ di essere decomponibile ovvero di essere della forma $\lambda = v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ con $v_1 \dots v_k \in V$

λ è decomponibile $\iff$ $\dim W = k$.

λ è decomponibile $\to \lambda = v_1 \wedge \dots \wedge v_k$; sia $W_0 = \mathrm{span}(v_i)$

$\lambda \in \Lambda^k W_0 \to W \subseteq W_0 \to \dim W \leq k$

se $\dim W < k \to \Lambda^k W = \{0\} \to [\lambda \in \Lambda^k W \to \lambda = 0]$

contro l'ipotesi. $\to \dim W = k$

Viceversa, se $\dim W = k$; sia $\{w_1 \dots w_k\}$ base di W

$\lambda \in \Lambda^k W \to \lambda = (\alpha\, w_1) \wedge \dots \wedge w_k$

Sia ora $W' = \{ w \in W \text{ t.c. } w \wedge \lambda = 0 \} \subseteq W$

Vale: λ è decomponibile $\iff W' = W$

$\iff \{ w \wedge \lambda = 0 \quad \forall\, w \in W \}$

Se λ è decomponibile $\Rightarrow$ $\dim W = k$

$\lambda = w_1 \wedge \dots \wedge w_k$, $w_1 \dots w_k$ base di W

$\forall\, w_i \in \{w_1 \dots w_k\} \rightarrow w_i \wedge \lambda = w_i \wedge w_1 \dots \wedge w_i \wedge \dots w_k$
$= 0$

$\rightarrow$ per linearità $w \wedge \lambda = 0 \;\; \forall\, w \in W$

Viceversa suppongo $w \wedge \lambda = 0 \;\; \forall\, w \in W$

Suppongo per assurdo $\dim W = \ell > k$

$$\Lambda^k W \otimes \Lambda^{\ell - k} W \longrightarrow \Lambda^\ell W \cong \mathbb{K} \quad \text{non degenere}$$

$0 \neq \vec{w}_{(k)} \in \Lambda^k W \quad \vec{w}_{(k)} = \sum a_I e_I$ con almeno un $a_I \neq 0$

Scelto $J \subseteq \{1 \dots n\}$ t.c. $e_I \wedge e_J = e_{1 \dots n}$

$w_{(u)} \wedge e_J = a_I \, e_{1 \dots n} \longmapsto a_I \neq 0$

$\exists \; u_{(l-k)}$ t.c. $\lambda \wedge u \neq 0$

assurdo

$u_{(l-k)}$ è combinazion di vettori del tipo

$w_{i_1} \wedge \dots w_{i_{l-k}}$ con $w_j \in \{ w_1 \dots w_l \}$ base di W

$\Rightarrow \lambda \wedge w_{i_1} \wedge \dots w_{i_{l-k}} = \underbrace{(\lambda \wedge w_{i_1})}_{= 0} \wedge \dots = 0$

$\Rightarrow \lambda \wedge u_{(l-k)} = 0 \quad \forall \; u_{(l-k)}$

Quindi $\dim W \leq K \Rightarrow \dim W = K$ (se $\dim W < K$
$\wedge^k W = 0$
$\Rightarrow \lambda = 0$)

λ decomponibile $\Longleftrightarrow \{ w \wedge \lambda = 0 \;\; \forall w \in W \}$

$$\iff \{ w \wedge \lambda = 0 \quad \forall\, w \in \{ i_\omega(\lambda) : \omega\ \Lambda^{k-1}V^* \}$$

$$\iff \{ \underbrace{i_\omega(\lambda) \wedge \lambda = 0}_{\uparrow} \quad \forall\, \omega \in \Lambda^{k-1}V^* \}$$

<u>equazione quadratica in λ</u>

Come ricavare W t.c. $P(W) = \lambda$?

Sia $\lambda \in \mathbb{P}(\Lambda^k V)$ t.c. λ soddisfi le eq. quadratiche delle Grassmanniane. Questo implica $\exists!\, W : W \xrightarrow{P} \lambda$

Come trovarlo? In coordinate significa che abbiamo degli elementi $M^{I,J} \in \mathbb{K}$ e ci chiediamo

i) $\exists$ matrice M $k \times n$ t.c. $M^{I,J}$ siano i minori di M? Sì se e solo se i coeff $M^{I,J}$ soddisfano minori $k \times k$ di M ...

(ii) Se sì, come determinare M? — le eq quadratiche della Grass

(W sarà il sottospazio di V generato dai vettori corrispondenti alle colonne di M)

Es: $n=4$; $k=2$

$\binom{4}{2}=6$ $\quad p^{12}, p^{13}, p^{14}, p^{23}, p^{24}, p^{34}$

Soddisfano $\quad p^{12}p^{34} - p^{13}p^{24} + p^{14}p^{23} = 0$

Almeno uno tra $p^{ij} \neq 0$. Supponiamo per semplicità p^{12}

Possiamo supporre $p^{12} = 1$. Mi posso sempre ricondurre

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M \quad \ldots \quad \begin{pmatrix} \alpha & \varepsilon \\ \beta & \eta \end{pmatrix} \quad \det\begin{pmatrix} \alpha & \varepsilon \\ \ldots \end{pmatrix} \ldots$

a $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-M}$. Infatti se $\begin{pmatrix} \cdot & \eta \\ \gamma & \theta \\ \delta & \zeta \end{pmatrix}$ con $\det \begin{pmatrix} \beta & \eta \end{pmatrix} \neq 0$

$\underset{A}{\shortparallel}$

$\begin{pmatrix} \alpha & \varepsilon \\ \beta & \eta \\ \gamma & \theta \\ \delta & \zeta \end{pmatrix} A^{-1}$ rappresenta ancora una base di W

M è tale che $M^{ij} = p^{ij}$

$1 = M^{12} = p^{12}$ $\qquad d = M^{14} = p^{14}$ $\qquad -c = M^{24} = p^{24}$

$b = M^{13} = p^{13}$ $\qquad -a = M^{23} = p^{23}$

Quindi $\quad a = -p^{23} \quad b = p^{13} \quad c = -p^{24} \quad d = p^{14}$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -p^{23} & p^{13} \\ -p^{24} & p^{14} \end{pmatrix}$$

p^{34} $\quad p^{23}p^{14}$ $\quad p^{24}p^{13}$ $\quad p^{12}p^{34}$ $\quad p^{34}$ $\quad p^{36}$

$$M^{\cdot\cdot} = -p^{23}p^{14} + p^{24}p^{13} = p^{12}p^{34} = 1 \cdot p^{34} = p^{34}$$

eq delle grassmanniane

Immersione di Veronese

$$V \longrightarrow V^{\otimes k}$$

$$v \longmapsto \underbrace{v \otimes v \otimes \cdots \otimes v}_{k \text{ volte}}$$

non è lineare ma induce $\mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V^{\otimes k})$

$$V \setminus \{0\} \longrightarrow V^{\otimes k} \setminus \{0\}$$

e $\quad \lambda v \longmapsto \beta\, v^{\otimes k}$

$$\alpha v \longmapsto (\alpha v)\otimes(\alpha v)\cdots\otimes(\alpha v) = \underset{\substack{\parallel \\ \beta}}{\alpha^k}\left(v^{\otimes k}\right)$$

$v \neq 0$ $\exists$ $\mathcal{B}$ base di V

$$\{\underset{\substack{\parallel \\ v}}{e_1}, \dots e_n\}$$

$\longrightarrow$ $\{e_{i_1}\otimes\cdots e_{i_n}\}$ base di $V^{\otimes k}$

$$\Downarrow$$

$$v\otimes v\cdots\otimes v = e_1\otimes e_1\cdots\otimes e_1$$

$$\mathbb{P}(V) \hookrightarrow \mathbb{P}\left(V^{\otimes k}\right)$$

v e w non sono linearmente dipendenti $\Rightarrow$ $v^{\otimes k}$ e $w^{\otimes k}$ non sono lin dip.

$\{e_1, e_2, \dots e_n\}$ base di V

$\overset{\shortparallel}{v} \quad \overset{\shortparallel}{w}$

$\underset{v^{\otimes k}}{\underset{\shortparallel}{e_1 \otimes \cdots \otimes e_1}}, \quad \underset{w^{\otimes k}}{\underset{\shortparallel}{e_2 \otimes \cdots \otimes e_2}} \in$ Base di $V^{\otimes k}$

$$\dim V^{\otimes k} = (\dim V)^k$$

$\{e_1 \cdots e_n\}$ base di V

$$v = v^1 e_1 + v^2 e_2 + \cdots v^n e_n$$

$$v^{\otimes k} = v^I e_I \qquad v^I = v^{i_1} \cdot v^{i_2} \cdots v^{i_k}$$

monomio di grado k
nelle variabili $v^1 \ldots v^n$

Es: $\dim V = 3$

$$v = x e_1 + y e_2 + z e_3$$

$$v^{\otimes 2} = x^2 e_1 \otimes e_1 + xy\, e_1 \otimes e_2 + yx\, e_2 \otimes e_1 + y^2 e_2 \otimes e_2 + \dots$$

$$= x^2 e_1 \otimes e_1 + xy (e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) + y^2 e_2 \otimes e_2 + \dots$$

In effetti abbiamo costruito

$$\left(\begin{array}{l} Sym^k(V) = \left(V^{\otimes k}\right)^{S_k} \\ V^{\otimes k} \circlearrowleft S_k \quad \begin{array}{c} v_1 \otimes \dots v_k \\ \downarrow \\ v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(k)} \end{array} \end{array} \right)$$

$$\mathbb{P}(V) \xhookrightarrow{\text{Veronese}} \mathbb{P}(Sym^k(V))$$

$$[x^0 : \dots x^n] \longmapsto [(x^0)^k : (x^0)^{k-1} x^1 : (x^0)^{k-1} x^2 : \dots$$

$$(x^0)^{d_0} (x^1)^{d_1} \dots (x^n)^{d_n} : \dots]$$

$$d_0 + d_1 + \dots + d_n = k$$

$$\dim V = 3$$

$$\begin{array}{cccccc} w^{00} & w^{01} & w^{02} & w^{11} & w^{12} & w^{22} \\ \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \end{array}$$

$$[x : y : z] \longmapsto [x^2 : xy : xz : y^2 : yz : z^2]$$

$$\mathbb{P}(V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathrm{Sym}^2(V))$$

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \hookrightarrow \mathbb{P}^5(\mathbb{K})$$

Sia X una quadrica in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$

(X una conica)

X ha equazione

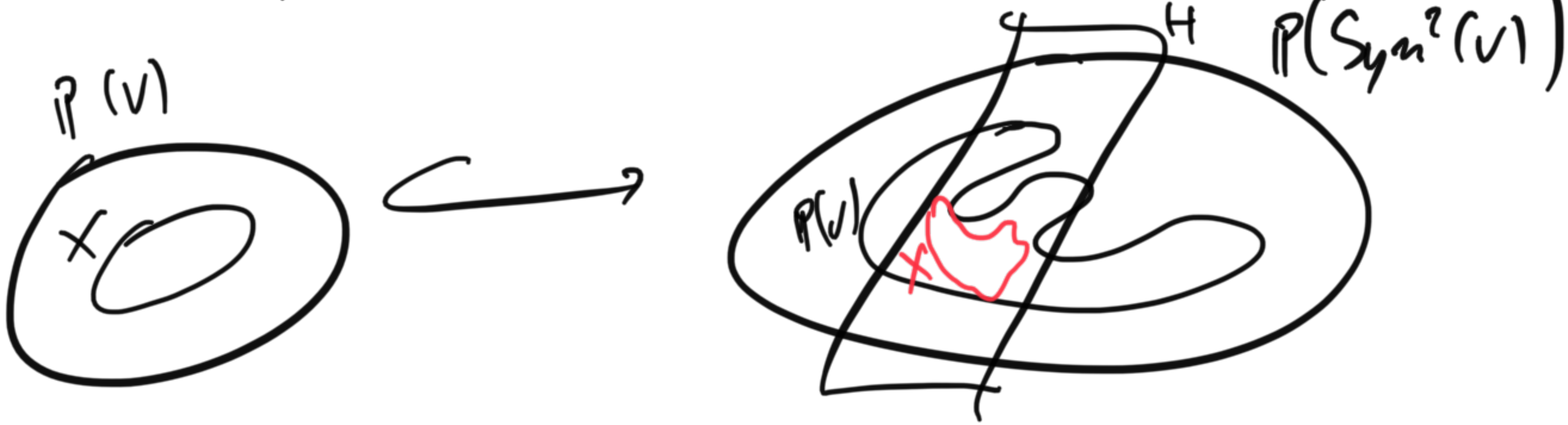
$$\underbrace{a x^2 + b xy + c xz + d y^2 + e yz + f z^2 = 0}$$

è un'equazione quadratica in $\mathbb{P}(V)$

$$H = \{\underbrace{a w^{00} + b w^{01} + c w^{02} + d w^{11} + e w^{12} + f w^{22} = 0}\}$$

è un'equazione lineare in $\mathbb{P}(\mathrm{Sym}^2(V))$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}(V) \arrow[r, hook, "\text{Veronese}"] & \mathbb{P}(\mathrm{Sym}^2(V)) \\
X \arrow[u, hook] \arrow[r, hook, "\sim"] & \mathrm{Veronese}(\mathbb{P}(V)) \cap H \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$



Mediante l'immersione di Veronese una ipersuperficie di grado k in $\mathbb{P}(V)$ si realizza come l'intersezione fra l'immagine di $\mathbb{P}(V)$ in $\mathbb{P}(\mathrm{Sym}^k(V))$ mediante Veronese e un iperpiano di $\mathbb{P}(\mathrm{Sym}^k(V))$

(ogni ipersuperficie è sezione iperpiano di uno ...

spazio proiettivo immerso in uno spazio proiettivo più grande)

Oss: $\mathbb{P}(V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathrm{Sym}^k(V))$

ha grado k

Quali sono le equazioni che definiscono $\mathrm{Veronese}(\mathbb{P}(V)) \subseteq \mathbb{P}(\mathrm{Sym}^k(V))$

Es: $\dim V = 3$ $\quad k=2$

coordinate in $\mathbb{P}(\mathrm{Sym}^2(V))$ sono

$$\begin{array}{cccccc} w^{00}, & w^{01}, & w^{02}, & w^{11}, & w^{12}, & w^{22} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x^0x^0 & x^0x^1 & x^0x^2 & x^1x^1 & x^1x^2 & x^2x^2 \end{array}$$

$$w^{00} w^{11} = w^{01} \cdot w^{01}$$

$$\uparrow \qquad\qquad \uparrow$$

$$x^0 x^0 x^1 x^1 \qquad x^0 x^1 x^0 x^1$$

$$w^{01} w^{12} = w^{02} w^{11}$$

$$\dots$$

In generale

$$w^I \cdot w^J = w^K \cdot w^L \quad \text{se} \quad I + J = K + L$$

$$I = (i_1 \dots i_k) \qquad J = (j_1 \dots j_k) \qquad K = (k_1 \dots k_k)$$

$$L = (L_1 \dots L_k)$$

$\mathbb{P}(V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathrm{Sym}^k(V))$ è descritto da un sistema di equazioni quadratiche

X ipersuperficie di grado k in $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$

X [illegible]

si può realizzare come intersezione di coniche e di un iperpiano in un $\mathbb{P}^N(\mathbb{K})$ con $N \geq n+1$

$$\mathbin{\rotatebox{90}{$\cong$}}$$
$$\mathbb{P}^{N-1}(\mathbb{K})$$

X si può realizzare come intersezione di quadriche in un qualche $\mathbb{P}^N(\mathbb{K})$.

Immersione di Segre

$$\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(W) \hookrightarrow \mathbb{P}(V \otimes W)$$

$$V \times W \longrightarrow V \otimes W$$
$$(v, w) \longmapsto v \otimes w$$