X curva algebrica proiettiva

$\nu : X^\nu \longrightarrow X$ normalizzazione

X^ν è proiettiva, normale $\longrightarrow$ liscia

$\dim X^\nu = 1$

In particolare X^ν è una desingolarizzazione

Un altro modo di desingolarizzare una curva X è mediante scoppiamenti successivi

$\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$ ottenuta mediante scoppiamenti

$\tilde{X}$ è liscia (dopo un numero opportuno di scoppiamenti) e proiettiva

$\pi : \tilde{X} \to X$ è regolare, dominante, con dominio

$\tilde{X}$ liscio $\to$ normale

$\exists !$
$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & X^{\nu} \arrow[dl, "\nu"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Sia π che ν sono equivalenze birazionali

$\Rightarrow$ φ è un'equivalenza birazionale tra due

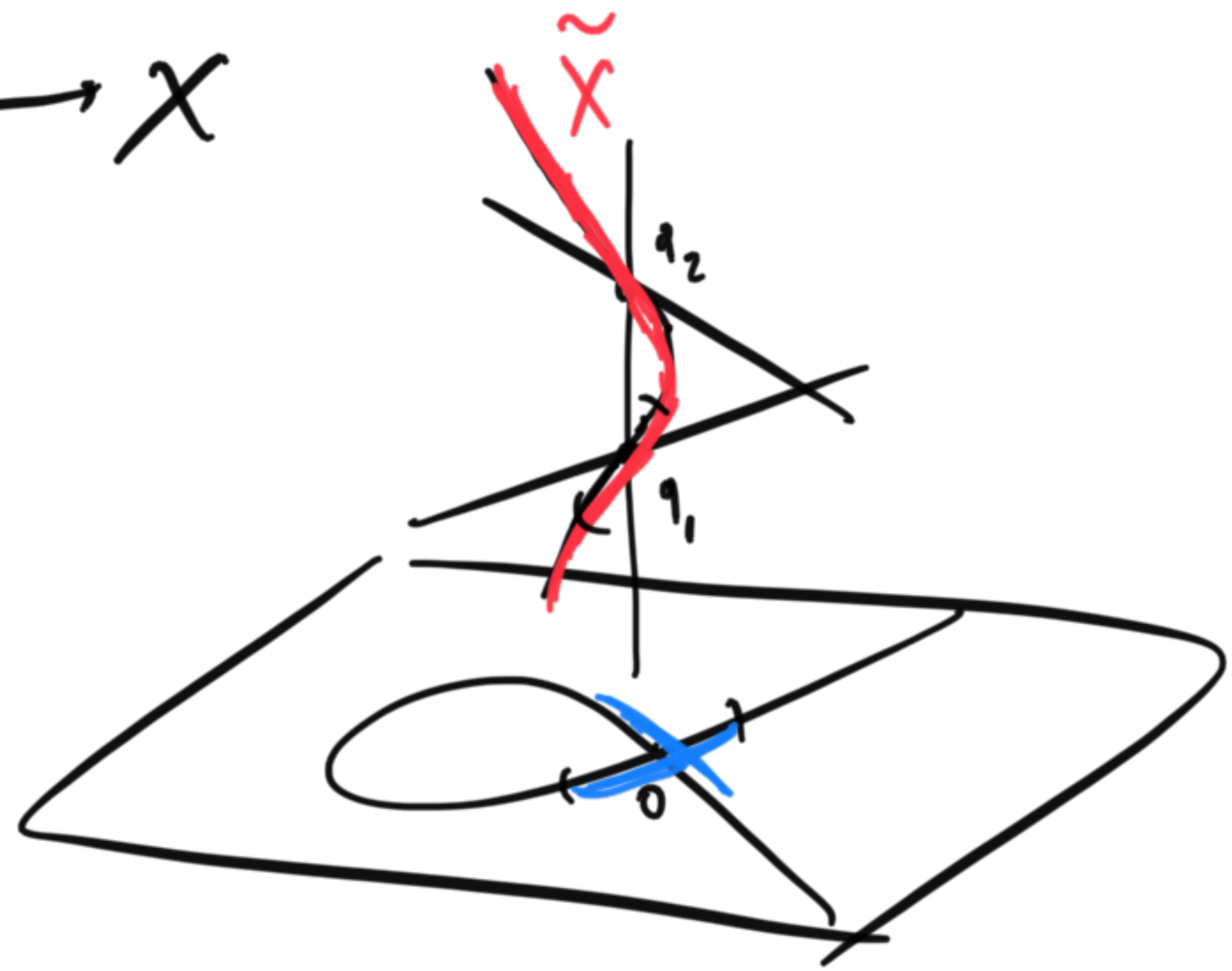
curve proiettive lisce. $\Rightarrow$ φ è un isomorfismo.

$\tilde{X} \cong X^{\nu}$

$X = X$

<u>Esempio</u> $X = \{ y^2 = x^2 + x^3 \} \subseteq \mathbb{A}^2$ (o meglio consideriamo la chiusura proiettiva di questa X affine : $X = \{ zy^2 = zx^2 + x^3 \subseteq \mathbb{P}^2 \}$)

$\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$



$\pi^{-1}(0) = \{ q_1, q_2 \}$

$\pi^{-1}(0) = \{q_1, q_2\}$

(nella topologia analitica, ci ritorno su $\mathbb{C}$)

Localmente attorno a q_1 e a q_2 $\tilde{X} \to X$

è un isomorfismo.

Algebricamente posso osservare che

$$d\pi : \underset{\dim 1}{\Theta_{q_1}} \longrightarrow \underset{\dim 2}{\Theta_{p=0}} \quad \text{è iniettiva!}$$

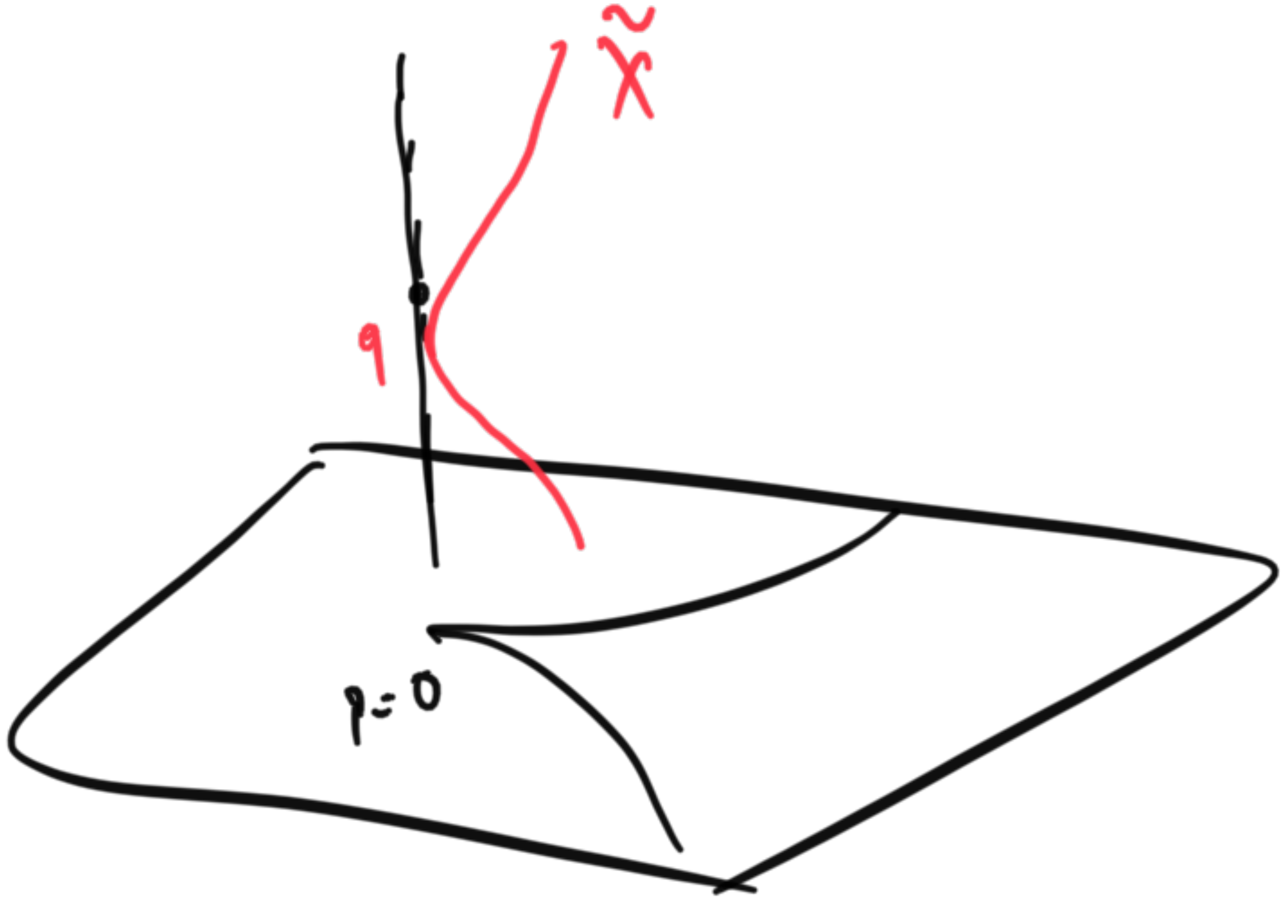
$$\Theta_{q_1} = \left(m_{q_1} / m_{q_1}^2 \right)^*$$

$$\left(m_{q_1} / m_{q_1}^2 \right)^* \longrightarrow \left(m_p / m_p^2 \right)^* \quad \text{è iniettiva}$$

$\pi^*: m_p/m_p^2 \longrightarrow m_{q_1}/m_{q_1}^2$ è suriettiva

lo stesso per q_2

<u>Esempio</u> $X = \{ y^2 = x^3 \}$



$\pi^{-1}(p)$ $\{q\}$

$\pi^{-1}(0) = \{q\}$

$d\pi : H_q \longrightarrow H_{p=0}$ è zero

dualmente

$\pi^* : {}^{m_p}/_{m_p^2} \longrightarrow {}^{m_q}/_{m_q^2}$ è zero

Oss: in ogni caso

dim 1

$\pi^* : {}^{m_p}/_{m_p^2} \longrightarrow {}^{m_q}/_{m_q^2}$

dove $q \in \pi^{-1}(p)$ ha solo due possibilità

$\dim \operatorname{Im}(\pi^*) = 1 \rightarrow \pi^*$ è suriettiva

$\searrow \dim \operatorname{Im}(\pi^*) = 0 \to \pi^* = 0$

$\pi^* : m_p \to m_q$

Se $\pi^*(m_p) \subseteq m_q^2 \to \pi^* : m_p/m_p^2 \to m_q/m_q^2$

è zero. Viceversa, se $\pi^* : m_p/m_p^2 \to m_q/m_q^2$ è

zero, allora $m_p \to m_p/m_p^2 \xrightarrow{\pi^*} m_q/m_q^2$ è zero

$\Rightarrow \pi^*(m_p) \subseteq m_q^2$

Le due possibilità sono:

$\pi^*(m_p) \not\subseteq m_q^2$

oppure

$\pi^*(m_p) \subseteq m_q^2$

Se di $\bigcap m_q^k = 0$

Se $\pi^*(m_p) \neq 0$ $\exists$ k t.c.

$\pi^*(m_p) \subseteq m_q^k$ ma $\pi^*(m_p) \not\subseteq m_q^{k+1}$

Questo k si dice molteplicità del "ramo"

q su p.

Poiché $\pi = \nu$ possiamo dare le seguenti

definizioni.

X curva proiettiva; $\nu : X^{\nu} \longrightarrow X$ la sua normalizzazione

$p \in X$.

Poiché $\nu : X^{\nu} \longrightarrow X$ è finita

$\nu^{-1}(p) = \{ q_1 \dots q_m \}$ è un insieme finito.

si chiamano i "rami" di X in p

Per ogni ramo q, il minimo intero k t.c.

$\nu^*(m_p) \subseteq m_q^{k}$ ma $\nu^*(m_p) \not\subseteq m_q^{k+1}$ si chiama

molteplicità del

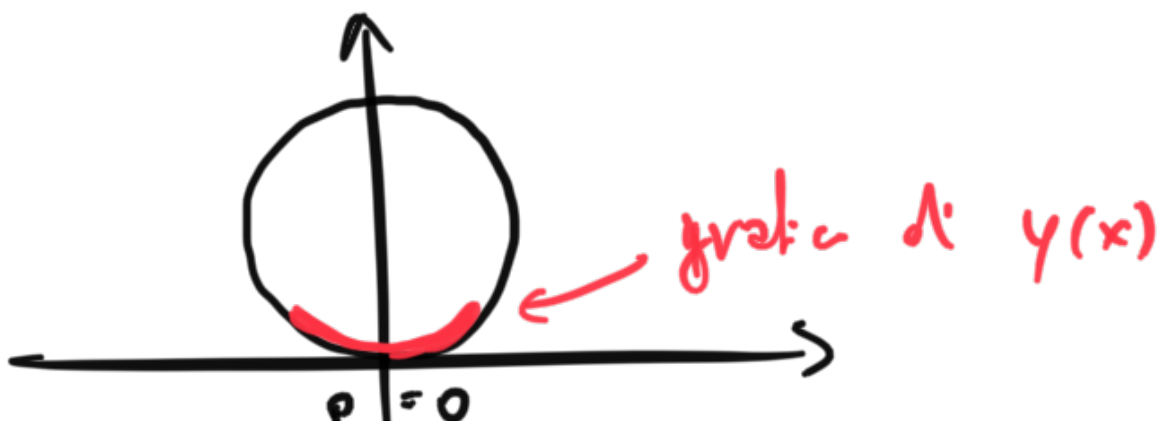
molteplicità del ramo q.

I rami con molteplicità 1 si chiamano "rami lineari"

Negli esempi $y^2 = x^2 + x^3$ ha due rami lineari in $p=0$; $y^2 = x^3$ ha un unico ramo di molteplicità 2 in $p=0$.

Alcuni esempi di curve algebriche piane

i) $y = x^2 + y^2$



$$f = y - (x^2 + y^2)$$

$$X = \{f = 0\} \quad ; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_0 , \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_0 \right) = (0,1)$$

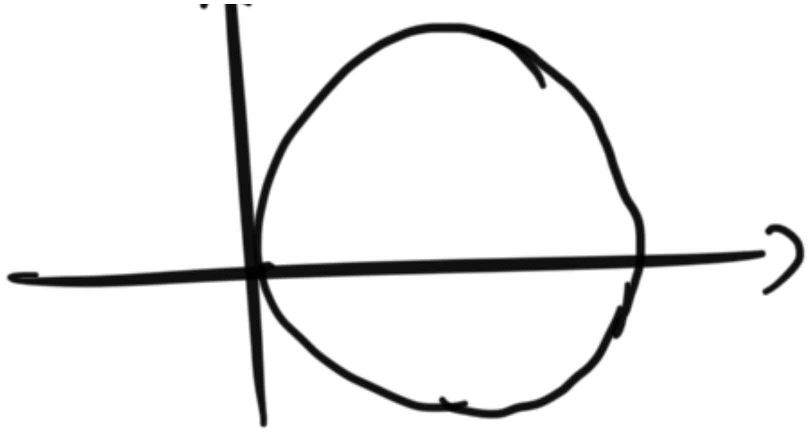
$\xrightarrow{\text{Dini}}$ $\exists$ serie formale $y(x) = \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{a_0} + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$

t.c. $\quad y(x) \equiv x^2 + y(x)^2$

e t.c. $\quad y(0) = 0$

Se siamo su $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ questa serie converge in un qualche intorno di 0

ii) $x = x^2 + y^2$

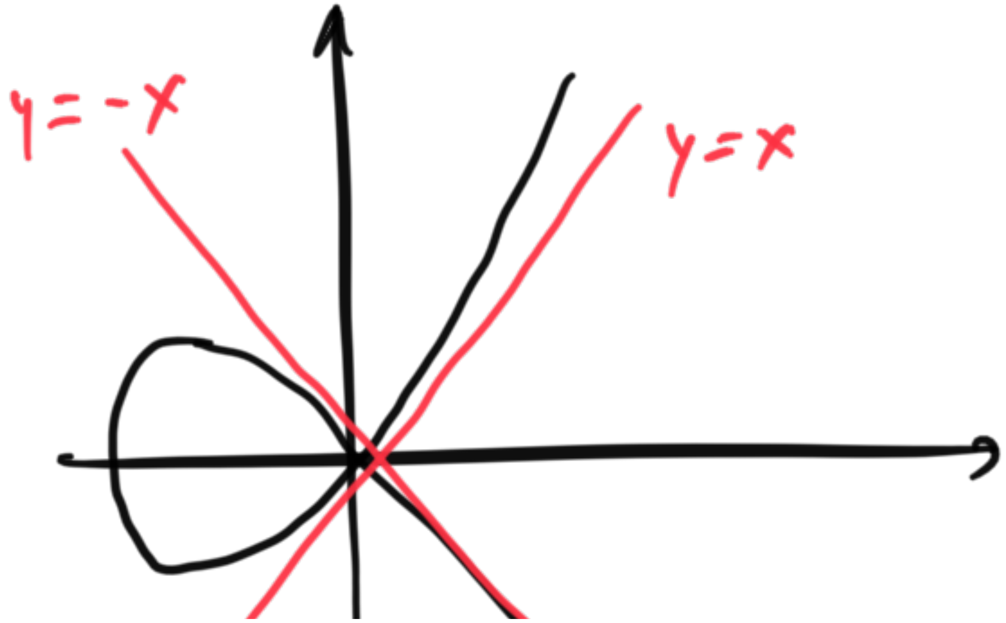


$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_0 , \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_0 \right) = (1, 0)$$

Stavolta non esiste $y(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \dots$

In compenso $\exists$ $x(y) = b_1 y + b_2 y^2 + \dots$

iii) $y^2 = x^2 + x^3$



$$y(x) = x + \cdots$$

$$x^2 + x^3 = x^2(1+x)$$

$$y^2 = x^2((1+x) \rightsquigarrow y = x\sqrt{1+x}$$

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad ; \quad \binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n(n-1)\cdots 1}$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

$$1+x = (1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)^2$$

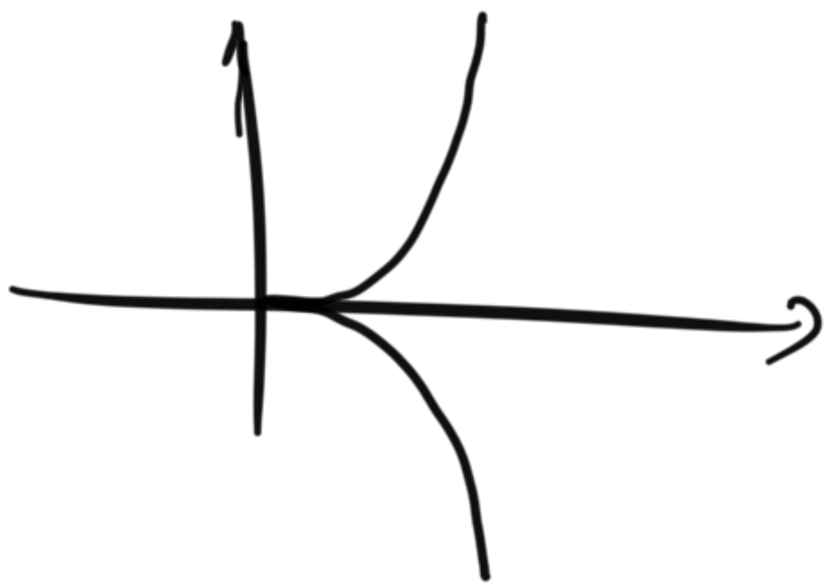
$$y^2 = x^2(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)^2$$

$$\Big(y - x(1 + a_1 x + \dots)\Big)\Big(y + x(1 + a_1 x + \dots)\Big) \equiv 0$$

$y(x) = x(1 + a_1 x + \dots)$ è una serie formale in x che parametrizza uno dei due rami.

$y(x) = -x(1 + a_1 x + \dots)$ parametrizza l'altro.

iv) $y^2 = x^3$



$$y = 0 + \dots$$

$$y^2 = x^2 \cdot x \rightsquigarrow y = x\sqrt{x} = x^{3/2}$$

Stavolta trovo una parametrizzazione in serie formali con esponenti in $\mathbb{Q}_{\geq 0}$. Si chiamano serie di Puiseux (le utilizzava già Newton)

ii) (ripresa)

$$x = x^2 + y^2 \rightsquigarrow y^2 = x - x^2 = x(1-x)$$

$$y = \sqrt{x}\,\sqrt{1-x}$$

$$\sqrt{1-x} = (1-x)^{1/2} = \sum_{n \geq 0} \binom{1/2}{n} (-x)^n$$

$$y = x^{1/2} \sum \binom{1/2}{n} (-x)^n = x^{1/2} + a_1 x^{3/2} + a_2 x^{5/2} + \dots$$

In generale, sia X una curva algebrica piana e sia $p \in X$. A meno di una traslazione possiamo assumere $p = 0$.

$\nu : \tilde{X} \longrightarrow X$. Sia $q \in \nu^{-1}(p)$

Sia t un parametro locale attorno a q (esiste perché $\tilde{X}$ è liscia)

$\nu(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ soddisferà identicamente

l'equazione che definisce X, e $\big(x(0)$ ...

λ ; $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

ν è regolare

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = a_m t^m + a_{m+1} t^{m+1} + \dots & a_m \neq 0 \\ y(t) = b_m t^m + b_{m+1} t^{m+1} + \dots & b_m \neq 0 \end{cases}$$

$$x(t) = t^m \left(a_m + a_{m+1} t + a_{m+2} t^2 + \dots \right)$$

$$= a_m \cdot t^m \left(1 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots \right)$$

$\exists\, \gamma : \gamma^m = \underset{\neq 0}{a_m}$ ($\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso)

$1 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots$ è una serie formale che comincia con 1.

Posso fare $(1+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2+\dots)^{\frac{1}{m}} = 1+\beta_1 t+\beta_2 t^2+\dots$

Ovvero $\exists\ 1+\beta_1 t+\beta_2 t^2+\dots$:

$$1+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2+\dots = (1+\beta_1 t+\dots)^m$$

$$x(t) = (\underbrace{\gamma t(1+\beta_1 t+\dots)}_{\tau})^m$$

$$x = \tau^m$$

$$\tau = \underset{\gamma}{\underset{\shortparallel}{\gamma_1}} t+\gamma_2 t^2+\dots \qquad \gamma_1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ posso risolvere esprimendo t come una serie

di ... in τ

potenze in τ

$$t = \beta_1 \tau + \beta_2 \tau^2 + \dots \qquad \beta_1 \neq 0$$

(basta scrivere $\tau \equiv \gamma_1(\beta_1 \tau + \beta_2 \tau^2 + \dots) + \gamma_2(\beta_1 \tau + \dots)^2 + \dots$

e risolvere ricorsivamente trovando i β_i)

In termini del parametro locale τ le equazioni diventano

$$\begin{cases} x(\tau) = \tau^m \\ y(\tau) = c_n \tau^n + c_{n+1} \tau^{n+1} + \dots \end{cases}$$

$$\tau = x^{1/m}$$

$$y(x) = c_n x^{n/m} + c_{n+1} x^{n+1/m} + \dots$$

Questo dimostra l'esistenza dello sviluppo in serie di Puiseux della parametrizz. locale.

Come trovare lo sviluppo di Puiseux?

Vediamo prima il caso degli sviluppi di Taylor

$$y = x^2 + y^2$$

Qui so che esiste $y(x) = \cancel{a_0} + \cancel{a_1} x + \dots$

t.c. $y(x) \equiv x^2 + y(x)^2$

Da questo ricavo gli a_i

$$\cancel{a_0} + \cancel{a_1 x} + \cdots = x^2 + (\cancel{a_0} + \cancel{a_1 x} + \cdots)^2$$

Impongo $y(0) = 0$

$$a_1 x + \cdots = (1 + a_1^2) x^2 + \cdots$$

questo implica $a_1 = 0$

$$y(x) = a_2 x^2 + \cdots$$

$$a_2 x^2 + \cdots = x^2 + (a_2 x^2 + \cdots)^2 = x^2 + a_2^2 x^4 + \cdots$$

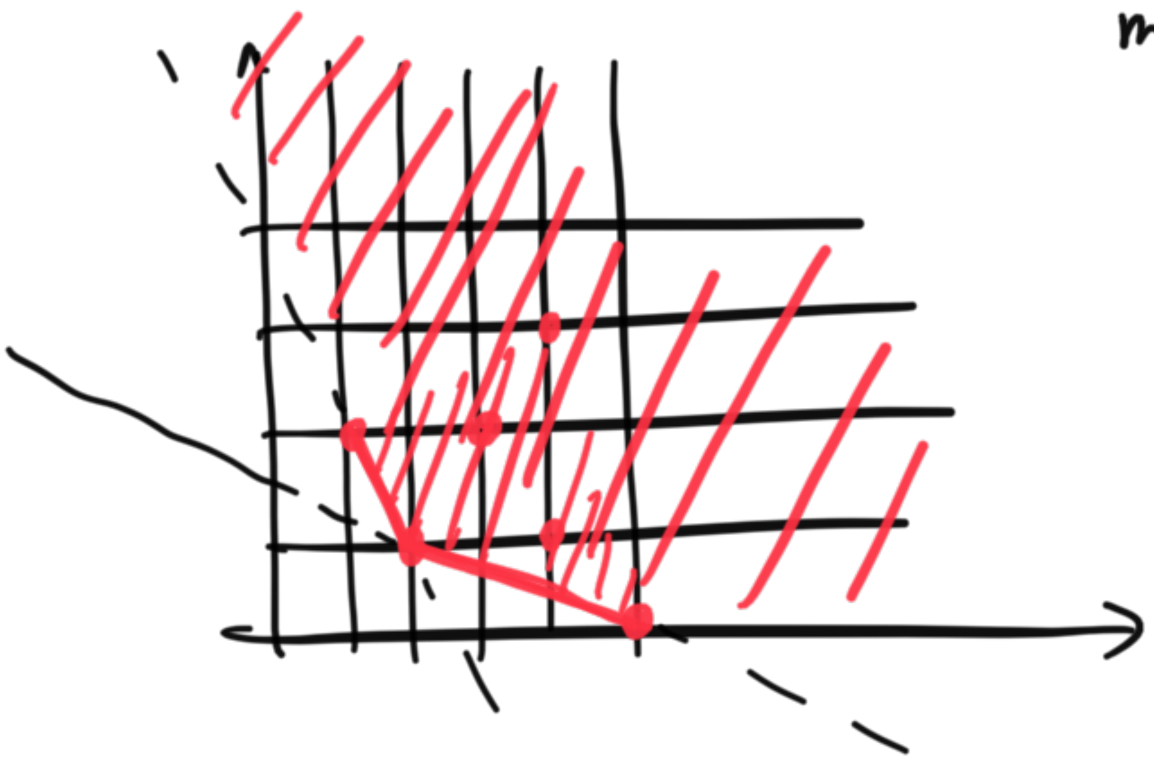
$$\Rightarrow a_2 = 1$$

$\cdots$

Per le serie di Puiseux?

Idea: il poligono di Newton.

$$f(x,y) = \sum_{i,j} a_{ij}\, x^i y^j$$



mettiamo un punto con coordinate (i,j) se $a_{ij} \neq 0$

Se $y(x) = \gamma x^{\alpha} + \dots$ è una serie di Puiseux che soddisfa identicamente $f(x, y(x)) \equiv 0$

$$\Rightarrow \sum a_{ij}\, x^i (\gamma x^{\alpha} + \dots)^j \equiv 0$$

$$\Rightarrow \sum f' a_{ij}\, x \; x + \dots = 0$$

$$\Rightarrow \sum b_{ij}\, x^{i+\alpha j} + \dots$$

Tutti i termini di grado più basso si devono cancellare.

(i_1, j_1) e (i_2, j_2) contribuiscono alla stessa potenza $x^{i+\alpha j}$ se e solo se

$$i_1 + \alpha j_1 = i_2 + \alpha j_2$$

$$\Leftrightarrow \alpha(j_2 - j_1) = -(i_2 - i_1)$$

$$\Leftrightarrow \alpha = -\frac{i_2 - i_1}{j_2 - j_1} \longleftarrow \text{coeff angolare della}$$

$j_2 - j_1$ retta ortogonale alla retta per (i_1, j_1) e (i_2, j_2)

Gli α "buoni" sono $-\frac{1}{m}$ con m coeff angolare di una delle rette del bordo del poligono di Newton

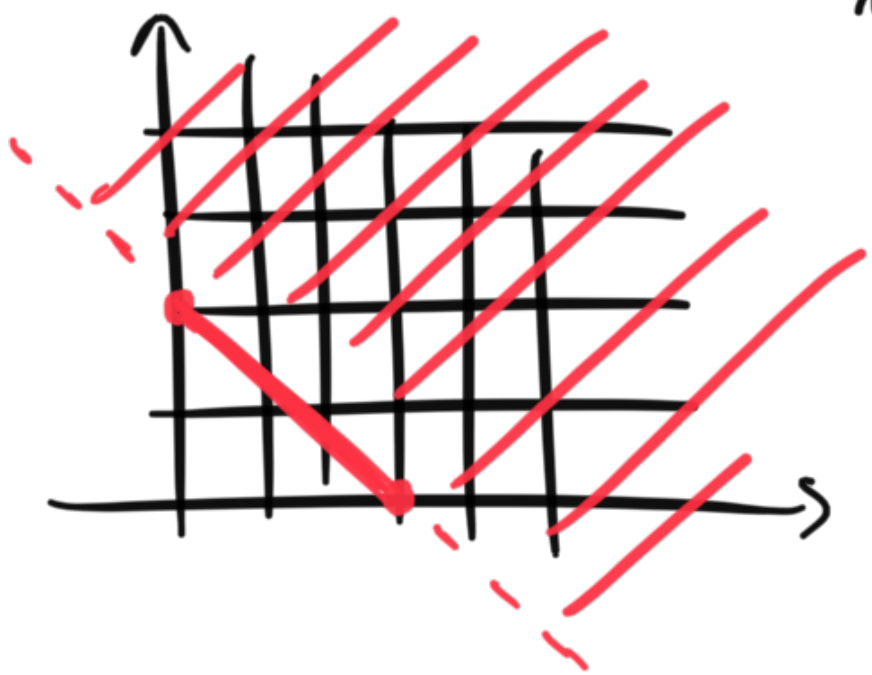
Esempio : $y^2 = x^2 + x^3$

$m = 0 \rightarrow \nexists \; -\frac{1}{m}$

$m = -1 \rightarrow -\frac{1}{m} = 1$

Ci sarà una serie di Puiseux

della forma $y(x) = a_1 x + \dots$



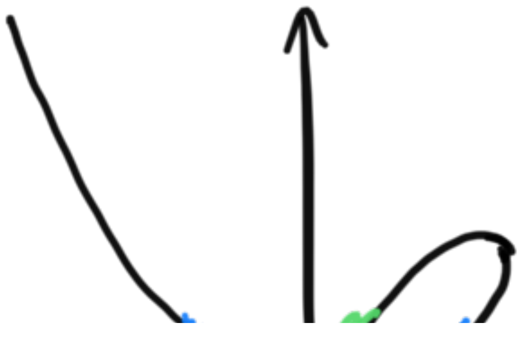
$m = -\frac{2}{3}$

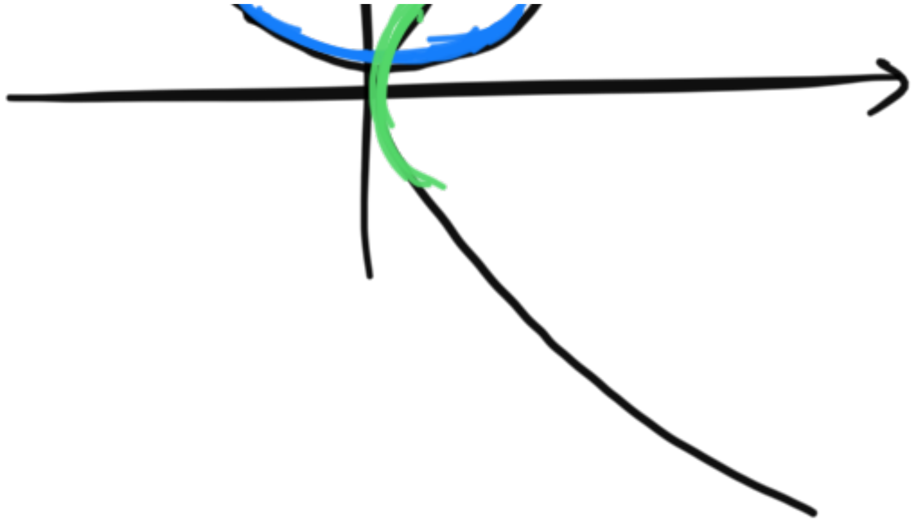
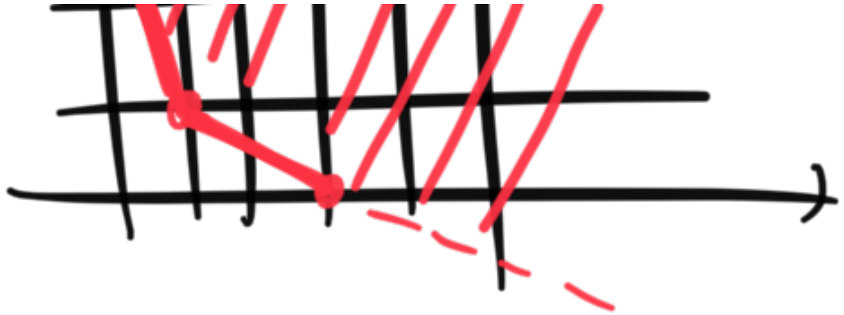
$-\frac{1}{m} = \frac{3}{2}$

Esempio : $y^2 = x^3$

$y(x) = a_1 x^{3/2} + \dots$

Esempio : $xy = x^3 + y^3$



$m = -\frac{1}{2} \longrightarrow -\frac{1}{m} = 2$

$m = -2 \longrightarrow -\frac{1}{m} = \frac{1}{2}$

$\exists \quad y(x) = a_1 x^2 + \dots$ ← questo ramo somiglierà alla parabola $y = a x^2$

$\exists \quad y(x) = a_1 x^{\frac{1}{2}} + \dots$

↖ questo ramo somiglierà alla parabola $y = a x^{\frac{1}{2}}$

ovvero $x = b y^2$

sviluppiamo con $y = a_1 x + \dots$

$$a_1 x^3 + \dots = x^3 + (a_1 x^2 + \dots)^3$$

$$\to \quad a_1 = 1$$

$$y = x^2 + \dots$$

Scrivo $y = x^2 + z$

$$x(x^2+z) = \cancel{x^3} + (x^2+z)^3 = \cancel{x^3} + x^6 + 3x^4 z + 3x^2 z^2 + z^3$$

$$\overset{4}{\cancel{x^3}} + xz$$

$$xz = z^3 + 3x^2 z^2 + 3x^4 z + x^6$$

$m = -2 \to -\frac{1}{m} = \frac{1}{2} < 2$

$m = -\frac{1}{5} \to$

$\overline{m} = 5\ v$

$$y = x^2 + a x^5 + \cdots$$

$$\cancel{x^2} + a x^6 + \cdots = \cancel{x^3} + \left(x^2 + a x^5 + \cdots \right)^3$$

$$= \cancel{x^2} + x^6 + \cdots$$

$$a = 1$$

$$y = x^2 + x^5 + \cdots$$

$X =$