$X \subseteq \mathbb{P}^n$ $\quad E$ sottospazio lineare $\quad E \cap X = \emptyset$

$$\pi_E : X \longrightarrow \pi_E(X) \quad \text{è finita}$$

se E è definito dalle equazioni lineari indipendenti

$F_0 = 0, \dots F_k = 0$

$$\begin{aligned} \pi_E : X &\longrightarrow \mathbb{P}^k \\ x &\longmapsto [F_0(x) : \dots : F_k(x)] \end{aligned}$$

Generalizzazione

Siano $F_0, \dots F_k$ polinomi omogenei di grado d nelle variabili $x^0, \dots x^n$ di $\mathbb{P}^n$, sia $X \subseteq \mathbb{P}^n$ varietà proiettiva con $X \cap \{F_0 = 0, \dots F_k = 0\} = \emptyset$

$\phi = [F_0 : \dots : F_k] : X \longrightarrow \mathbb{P}$ è regolare

e $\phi : X \longrightarrow \phi(X)$ è <u>finita</u>

<u>Dim</u>:

$$\mathbb{P}^n \xhookrightarrow{Ver_d} \mathbb{P}^N$$

$\forall\ F_i$ di grado d su $\mathbb{P}^n$

$F_i = Ver_d^* L_i$ $\qquad L_i$ di grado 1 su $\mathbb{P}^N$

$F_0 \dots F_k \rightsquigarrow L_0 \dots L_k$ di grado 1 su $\mathbb{P}^N$

Sia $E \subseteq \mathbb{P}^N$ definito da $\{L_0 = 0 \dots L_k = 0\}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^n \arrow[r, hook, "Ver_d"] & \mathbb{P}^N \arrow[d, "\pi_E"] \\ & {} \end{tikzcd}$$

$$\xrightarrow{\pi_E \circ Ver_d} \mathbb{P}^k$$

$$\pi_E := [L_0 : \dots : L_k]$$

$$\pi_E \circ Ver_d = Ver_d^*(\pi_E) = Ver_d^*[L_0 : \dots L_k] = [Ver_d^* L_0 : \dots Ver_d^* L_k]$$
$$= [F_0 : \dots : F_k]$$

$$\phi : X \longrightarrow \phi(X)$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "Ver_d", "\sim"'] \arrow[dr, "\phi"'] & Ver_d(X) \arrow[d, "\pi_E"] \\
& \pi_E(Ver(X)) = \phi(X)
\end{tikzcd}$$

finita

$$E \cap Ver_d(X) = \emptyset$$

$$p \in E \cap Ver_d(X)$$
$$\Updownarrow$$
$$L_0(p) \dots L_k(p) = 0$$
$$p \in Ver_d(X)$$
$$\Updownarrow$$

$\phi : X \to \phi(X)$ è finita

$p = \mathrm{Verd}(q) \quad q \in X$

$F_0(q) \ldots F_n(q) = 0$

Dimensione di una varietà quasiproiettiva

X varietà differenziale di dim n

significa che $\forall p \in X$ esiste un intorno di p in X diffeomorfo a una palla aperta di $\mathbb{R}^n$. Ma $B^n(r) \cong \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \forall p \in X \ \exists$ intorno di p in X diffeomorfo a $\mathbb{R}^n$

Questo suggerisce la seguente:

X quasi proiettiva. Diremo che X ha dimensione n

X quasi-proiettiva ...

se $\forall\, p \in X$ $\exists$ un intorno U di p in X (nella top. di Zariski con $U \cong \mathbb{A}^n$

Questa non è una buona nozione!

$U \hookrightarrow X$ è un'equivalenza birazionale

Se $U \cong \mathbb{A}^n \Rightarrow X$ è birazionalmente equivalente ad $\mathbb{A}^n$. $\Rightarrow$ la definizione di dimensione avrebbe senso solo per varietà birazionali ad $\mathbb{A}^n$ (varietà razionali). Ma queste sono pochissime (già una curva piana liscia di grado 3 non è birazionale ad $\mathbb{A}^1$)

Cerchiamo di caratterizzare la dimensione mediante proprietà auspicabili

i) $U \subseteq X$ U aperto $\Rightarrow \dim X = \dim U$

ii) $f: X \to Y$ finita $\Rightarrow \dim X = \dim Y$

iii) $\dim \mathbb{A}^n = n$

Possiamo ora definire $\dim X$ con X quasi proiettiva.

Per i) basta definire la dimensione delle varietà proiettive (sempre per i) basterà definirla per le varietà affini)

da i) + iii) $\Rightarrow \dim \mathbb{P}^n = \dim \mathbb{A}^n = n$

X proiettiva $\Rightarrow \exists\, f: X \to \mathbb{P}^n$ finita

Noether

$\Rightarrow$ per ii) $\dim X = \dim \mathbb{P}^n = n$.

Problema: è ben posta?

$$\mathbb{P}^m \xleftarrow{g} X \xrightarrow{f} \mathbb{P}^n \Rightarrow n = m?$$

Sia $f: X \to \mathbb{P}^n$ finita. Voglio esprimere n in termini di informazioni che dipendono solo da X.

Suppongo X irriducibile. Se esiste f

$f: X \to \mathbb{P}^n$ finita $\Rightarrow \mathbb{K}(X)$ è algebrico su $\mathbb{K}(\mathbb{P}^n)$

$\mathbb{K}(X)$

gr tr = 0

$$\mathbb{K}(\mathbb{P}^n) = \mathbb{K}(\mathbb{A}^n) = \mathbb{K}(t^1, \dots t^n) \qquad \text{gr tr} = n$$

gr tr = n

$\mathbb{K}$

$$n = \text{grado tr}(\mathbb{K}(X) : \mathbb{K})$$

Se X è irriducibile posso definire

$$\dim X := \text{grado tr}(\mathbb{K}(X) : \mathbb{K})$$

In generale $X = \bigcup X_i$, X_i irriducibili in numero finito

$$\dim X := \max \dim X_i$$

Oss: $\dim X$ dipende solo da $\mathbb{K}(X)$ (se X irriducibile)

$\Rightarrow$ $\dim X$ è un'invariante birazionale

$\dim \mathbb{A}^n = n = \operatorname{grtr}(\mathbb{k}(\mathbb{A}^n) : \mathbb{k})$

se f è finita f^* non aumenta il grado di trascendenza.

<u>Esempi</u>: $\dim \mathbb{A}^n = n$; $\dim \mathbb{P}^n = n$

$\dim Gr(k; n) = ?$

$\cup\!\mid$

$A_{1,\dots k; 1\dots k} \longleftrightarrow \{M$ matrici $k \times n$ con il minore $k \times k$ con le prime k righe e colonne diverso da $0\} / GL(k)$

$$\left(\begin{array}{cc} \underbrace{\begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix}}_{k} & \underbrace{\;B\;}_{n-k} \end{array}\right)\Big]\,k \;\cong\; \mathbb{A}^{k(n-k)}$$

$\dim Gr(k;n) = k(n-k)$ $\quad$ (oss: $Gr(k,n)$ biraz. $\mathbb{A}^{k(n-k)}$)

$\{p\} = \mathbb{P}^0$ ha dim 0

$\mathbb{K}(p) = \mathbb{K}$

Se X è irriducibile, $\dim X = 0 \Rightarrow X = \{pt\}$

(possiamo supporre X affine. $[\mathbb{K}(X):\mathbb{K}]$ ha grado di trasc. 0 (dato che $\dim X = 0$) $\Rightarrow \mathbb{K}(X)$ è algebrico su $\mathbb{K}$. $X \in \mathbb{A}^n$; $t^1|_X \dots t^n|_X$ generano $\mathbb{K}(X)$

$t^1|_X \dots t^n|_X$ sono algebrici su $\mathbb{K}$. Ma $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso (siamo sempre in quest'ipotesi)

$\Rightarrow t^1|_X \dots t^n|_X \in \mathbb{K} \Rightarrow t^i|_X$ è costante su X

$\Rightarrow t^1|_X \equiv \lambda^1 \dots \Rightarrow X = \{(\lambda^1 \dots \lambda^n)\}$.

(se $\mathbb{K}$ non è algebricamente chiuso, allora $t^i|_X$ algebrico su $\mathbb{K} \Rightarrow t^i|_X$ può assumere un numero finito di valori in $\overline{\mathbb{K}}$, quindi anche se $\mathbb{K}$ non è algebricamente chiuso, $\dim X = 0 \Rightarrow X$ finito)

Oss: X e Y sono irriducibili $\Rightarrow$

$$\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$$

Possiamo supporre X e Y affini

$X \subseteq \mathbb{A}^N$; $Y \subseteq \mathbb{A}^M$

$t^1 \dots t^N$ $\qquad$ $u^1 \dots u^M$

$\dim X = n$; $\dim Y = m$

Esistono $t^{i_1} \dots t^{i_n}$ alg. indip in $\mathbb{K}(X)$. Possiamo supporre siano $t^1 \dots t^n$; analogamente $u^1 \dots u^m$ in $\mathbb{K}(Y)$.

Tutti gli altri sono algebrici su questi

$\mathbb{K}(X \times Y)$ è generato da $(t^1 \dots t^N, u^1 \dots u^M)$

in quanto $X \times Y \subseteq \mathbb{A}^N \times \mathbb{A}^M$

in questo $X \times Y \subseteq \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m$ sono algebrici

su $(t^1 \dots t^n, u^1 \dots u^m)$

$$\text{tr} \le n+m \quad \begin{array}{l} \mathbb{K}(X \times Y) \\ \quad | \quad \leftarrow \text{tr } 0 \\ \mathbb{K}(t^1 \dots t^n, u^1 \dots u^m)\big|_{X\times Y} \\ \quad | \quad \leftarrow \text{tr} \le n+m \\ \mathbb{K} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{l} \mathbb{K}(t^1 \dots t^n, u^1 \dots u^m) \ \text{su } \mathbb{A}^n_X \mathbb{A}^m \\ \quad | \quad \text{tr} = n+m \\ \mathbb{K} \end{array} \right.$$

quando restringo a $X \times Y$ potrebbe nascere qualche relazione algebrica)

$$\Longrightarrow \dim(X \times Y) \le n+m$$

Resta da dimostrare che $t^1\big|_{X\times Y} \dots u^m\big|_{X\times Y}$ sono algebr. indip.

Supponiamo $\exists$ un polinomio $F(t^1 \dots t^n; u^1 \dots u^m)$

t.c. $F\big|_{X\times Y} \equiv 0$

$$F(t,u) = \sum a_i(t)\cdot b_i(u)$$

Sia $x \in X$ e consideriamo $F(x;u) = G(u)$

$G\big|_Y \equiv 0 \Rightarrow \sum a_i(x)\, b_i(u)\big|_Y \equiv 0$ è un polinomio nelle $u^i\big|_Y$ che si annulla $\Rightarrow$ $G \equiv 0 \Rightarrow$ tutti i coeff di G sono 0.

$\uparrow$

$u^i\big|_Y$ sono algebr. indip

$\Rightarrow a_i(x) = 0 \quad \forall x \in X \Rightarrow a_i(\vec{t})\big|_X \equiv 0$

ma $t^1\big|_X \dots t^n\big|_X$ sono algebric. indip $\Rightarrow a_1 \equiv 0 \dots$

$a_k \equiv 0$

$\Rightarrow F \equiv 0$

$\Rightarrow$ non ci sono relazioni algebriche non banali

tra $t^1|_{X \times Y} \ldots u^m|_{X \times Y}$.

$\Rightarrow \dim X \times Y = n + m = \dim X + \dim Y$.

$$X \subseteq Y \Rightarrow \dim X \leq \dim Y$$

dim: X, Y affini

$X \subseteq Y \subseteq \mathbb{A}^N$

$t^1 \ldots t^N$

$\mathbb{K}(X)$ è generato da $t^1|_X \ldots t^N|_X$

$\mathbb{K}(Y)$ " " $t^1|_Y \ldots t^N|_Y$

Sia $n = \dim Y$; $d = \dim X$

Se scelgo $N > n$ elementi in $t^1|_Y \dots t^N|_Y$ questi sono alg. dipendenti

$\exists$ d elementi indipendenti in $\{t^1|_X \dots t^N|_X\}$

supponiamo siano $\{t^1|_X \dots t^d|_X\}$

Se $t^1|_Y \dots t^d|_Y$ sono alg. dipendenti $\Rightarrow$

$\exists\, F$ t.c.

$$F(t^1|_Y \dots t^d|_Y) \equiv 0$$

$$\Rightarrow F(t^1 \dots t^d)|_Y \equiv 0 \Longrightarrow F(t^1, \dots t^d)|_X \equiv 0$$

$Y \qquad X \subseteq Y \qquad \Downarrow$

$$F(t^1|_X, \dots t^d|_X) \equiv 0$$

$$\Downarrow$$

$$F \equiv 0$$

$\Rightarrow t^1|_Y \dots t^d|_Y$ sono alg. indip.

$\Rightarrow d \leq m$.

$X \subseteq Y$; Y irriducibile, X chiusa

$\dim X = \dim Y \Longrightarrow X = Y$

dim: al solito $X \subseteq Y \subseteq \mathbb{A}^N$

dimostriamo che $I(X) = I(Y)$

dato che $X \subseteq Y \Rightarrow I(Y) \subseteq I(X) \subseteq \mathbb{K}[t^1 \dots t^N]$

Sia $u \in I(X)$. Voglio dimostrare $u \in I(Y)$

$(\Rightarrow I(X) \subseteq I(Y)$ e quindi $I(X) = I(Y))$

$u \in I(X) \Rightarrow u \in \mathbb{K}[t^1 \dots t^N]$

$u|_Y \in \mathbb{K}(Y)$. Sia $\dim X = \dim Y = n \Rightarrow$ posso supporre

$t^1|_X \dots t^n|_X$ siano algebricamente indip. $\Rightarrow t^1|_Y \dots t^n|_Y$ sono alg. indi

e tutte le altre sono algebric. dipendenti da queste.

$u|_Y$ è algebrico su $\mathbb{K}(t^1|_Y \dots t^n|_Y)$

$\exists$ $a_0(t^1 \dots t^n) \quad \dots \quad a_n(t^1 \dots t^n) \in \mathbb{K}[t^1 \dots t^n]$

$$A\big|_Y = a_0(t^1 \dots t^n)\, u^k + a_1(t^1 \dots t^n)\, u^{k-1} + \dots a_k(t^1 \dots t^n)\Big|_Y \equiv 0$$

$$A \in \mathbb{K}[t^1 \dots t^n, u]$$

$$A = A_1 \cdots A_k \qquad A_i \text{ irriducibili}$$

$$A\big|_Y = 0 \Rightarrow A_1\big|_Y \cdot \dots A_k\big|_Y = 0 \underset{Y \text{ irriducibile}}{\Longrightarrow} \exists i : A_i\big|_Y \equiv 0$$

Quindi possiamo supporre A sia irriducibile.

$$A\big|_X \underset{X \subseteq Y}{\equiv} 0 \underset{u|_X \equiv 0}{\Longrightarrow} a_k(t^1, \dots t^n)\big|_X \equiv 0 \Rightarrow a_k\left(t^1\big|_X \dots t^n\big|_X\right) \equiv 0$$

ma $t^1|_X \dots t^n|_X$

son alg. indip

$\Rightarrow a_k(t^1 \dots t^n) \equiv 0$

$\Rightarrow u \mid A$; A irriducibile $\Rightarrow u = A \Rightarrow u|_Y = A|_Y = 0$

$\Rightarrow u \in I(Y)$.

X ipersuperficie irriducibile di $\mathbb{A}^n$, ovvero $X = V(f)$

f irriducibile $f \not\equiv 0$.

$\Rightarrow \dim X = n-1$

dim: $X \subseteq \mathbb{A}^n$ ed è chiuso

$\dim X \leq \dim \mathbb{A}^n = n$

Se $\dim X = n \longrightarrow X = \mathbb{A}^n$ il che è falso.

$(f|_{\mathbb{A}^n} \equiv 0 \Rightarrow f \equiv 0)$

$\dim X \leq n-1$

f è non costante $\Rightarrow$ c'è almeno una di $\{t^i\}$ che compare esplicitamente in f. Suppongo sia t^n.

$\text{grado}_{t^n}(f) \geq 1$.

Considero $t^1|_X \dots t^{n-1}|_X$

Suppongo siano alg. dipendenti $\Rightarrow \exists\, g(t^1 \dots t^{n-1})$ t.c.

$g(t^1 \dots t^{n-1})\big|_X \equiv 0 \implies g \in I(X) = I(V(f)) = \sqrt{(f)} = (f)$

$\implies f \mid g \implies \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\mathrm{grado}_{t^n}(g)}} \geq \mathrm{grado}_{t^n}(f) \geq 1$. Assurdo

Quindi $t^1\big|_X \dots t^{n-1}\big|_X$ sono alg. indip. $\implies \underset{\geq n-1}{\mathrm{gr\,tr}(\mathbb{K}(X):\mathbb{K})}$

$\implies \dim X \geq n-1 \implies \underset{V(f)}{\underset{\shortparallel}{\dim X}} = n-1$

Coroll. Se $X = V(f) \implies$ ogni componente irriducibile di X ha dim $n-1$.

dim: $f = f_1 \dots f_k$ f_i irriducibili

$$V(f) = V(f_1) \cup \dots \cup V(f_k)$$

sono le componenti irriducibili di $X = V(f)$
e ognuna ha dim $n-1$ per il risultato precedente

Vale il viceversa!

Se $X \subseteq \mathbb{A}^n$ chiusa, $\dim X_i = n-1$ $\forall X_i$ componente irriducibile

Allora $X = V(f)$.

<u>Dim</u>: Possiamo supporre X irriducibile ($X_i = V(f_i)$ $\Rightarrow X = V(f_1 \dots f_k)$)

$X \neq \mathbb{A}^n$ ($\dim X = n-1$)

$X \neq \mathbb{A}^n \quad \left(\begin{array}{l} \dim X = m \\ \dim \mathbb{A}^n = n \end{array} \right)$

$\Rightarrow \quad I(X) \neq (0)$

$\exists \; g \not\equiv 0 \quad g \in I(X)$

$g = g_1 \cdots g_n \qquad g_i$ irriducibile

$$g_1|_X \cdots g_n|_X \equiv 0 \underset{\substack{\uparrow \\ X \text{ irriducibile}}}{\Rightarrow} \exists\, i \text{ t.c. } g_i|_X \equiv 0.$$

$g_i \in I(X)$ con g_i irriducibile.

Poniamo $h = g_i \Rightarrow h$ irriduc

[illegible]

$$(f) \subseteq I(X)$$

irreduc.

$$\Rightarrow X \subseteq V(f) \Longrightarrow X = V(f)$$

dim $n-1$

dim $n-1$