Proprietà locali di una varietà X

Sia $x \in X$; ci interessano le proprietà di X che dipendono solo da un intorno arbitrariamente piccolo di x in X.

(Es: lo spazio tangente di X in x)

X varietà affine (possiamo sempre ricondurci a questo dato che $\forall x \in X$ $\exists$ sempre un intorno affine U di x in X)

$X \rightsquigarrow \mathbb{K}[X]$

$$\Downarrow$$

$$x \leftrightsquigarrow m_x = I_{\{x\}} = \{ f \in \mathbb{K}[X] \; : \; f(x) = 0 \}$$

$\mathbb{K}[X] \subseteq \mathbb{K}(X)$ assumendo che X sia irriducibile

$$= \left\{ f/g \text{ con } g \not\equiv 0 \text{ su } X \right\}$$

f/g è una funzione regolare sull'aperto $X \setminus V(g)$

se $x \in V(g)$, ovvero se $g(x) \neq 0 \Rightarrow x \in X \setminus V(g)$

$\Rightarrow X \setminus V(g)$ è un intorno aperto di x in X sul quale f/g è regolare.

$\Rightarrow$ le funzioni regolari in un qualche intorno di x

sono le frazioni f/g (ovvero gli elementi di $\mathbb{K}(X)$)

con $g(x) \neq 0$.

Indichiamo con $\mathcal{O}_{X,x}$ l'anello delle funzioni regolari

in un qualche intorno di x.

Vediamo algebricamente questa costruzione.

A anello commutativo, $\mathfrak{p}$ ideale primo di A. ($\mathfrak{p}$ non banale)

$S = A \setminus \mathfrak{p}$; $S \neq \emptyset$ $1 \in S$ (se $1 \notin S \Rightarrow 1 \in \mathfrak{p} \Rightarrow \mathfrak{p}$ banale)

S è un sistema moltiplicativo: $x, y \in S \Rightarrow x \cdot y \in S$.

(se $x \cdot y \notin S \Rightarrow xy \in p \Rightarrow x \in p$ oppure $y \in p \Rightarrow x \notin S$ oppure $y \notin S$). Inventiamo formalmente tutti gli elementi di S

$$A_p = \{ f/g \; : \; g \in S \}$$

$$f/g = f'/g' \quad \text{se} \quad \frac{f}{g} - \frac{f'}{g'} = 0 \quad \text{se} \quad \frac{fg' - f'g}{gg'} = 0$$

$$\text{se} \quad fg' = f'g$$

Questo suggerisce $A_p = \{ (f,g),\ g \in S \}/\sim$

$$(f,g) \sim (f',g') \quad \text{se} \quad fg' = f'g$$

$\sim$ è di equivalenza?

$$\left.\begin{array}{l}(f,g)\sim(f',g')\\(f',g')\sim(f'',g'')\end{array}\right\}\overset{?}{\Longrightarrow}(f,g)\sim(f'',g'')$$

$$\begin{array}{l}fg'=f'g\\f'g''=f''g'\end{array}\Longrightarrow fg'g''=\underbrace{f'g''}_{\substack{\parallel\\f''g'}}g=f''g'g\Rightarrow \underset{\substack{\cap\\S}}{g'}(fg''-f''g)=0$$

Correggo la definizione della relazione di equivalenza:

$(f,g)\sim(f',g')$ se $\exists\, h\in S$ t.c. $hfg'=hf'g$

$hfg'=hf'g$

$$kf'g'' = kf''g' \Rightarrow khfg'g'' = khf'gg'' = khf''g'g$$

$$\Rightarrow \underset{\in S}{(khg')} \cdot fg'' = \underset{\in S}{(khg')} f''g$$

$$\Rightarrow (f,g) \sim (f'',g'')$$

Notazione: $[(f,g)] = f/g$

A_p è un anello con $\frac{f}{g} + \frac{f'}{g'} = \frac{fg' + f'g}{gg'}$; $\frac{f}{g} \cdot \frac{f'}{g'} = \frac{ff'}{gg'}$

$\uparrow$

Anello locale di A al primo p.

$\mathcal{O}_{X,x}$ è l'anello locale di $\mathbb{K}[X]$ al primo m_x

Ideali di A_p.

i) $A \longrightarrow A_p$ è un monomorfismo di anelli

$$f \longmapsto f/1$$

ii) m_p è un ideale di A_p

$$m_p = \left\{ \frac{x}{g}, \; x \in p, \; g \in S \right\}$$

$$\frac{x}{g_1} + \frac{y}{g_2} = \frac{\overbrace{xg_2 + yg_1}^{\in p}}{\underbrace{g_1 g_2}_{S}} \in m_p$$

$$\frac{x}{g} \cdot \frac{f}{g'} = \frac{xf \in p}{gg' \in S} \in m_p$$

$$\left(\frac{g}{1} \cdot \frac{1}{g} = \frac{g}{g} = \frac{1}{1} \right.$$

per come ho definito la relazione di equivalenza)

$$m_p \subseteq A_p$$

Es: $p = m_x \subseteq \mathbb{K}[x]$

$$m_p = \left\{ \frac{f}{g} \text{ con } f(x)=0 \, , \, g(x) \neq 0 \right\}$$

Per evitare confusione di notazione scriviamo

$$m_x(\mathbb{K}[x]) = \{ f \in \mathbb{K}[x] : f(x) = 0 \}$$

$$m_x(\mathcal{O}_{X,x}) = \{ f/g : f(x) = 0 \}$$

$m_x(\mathbb{K}[X])$ è massimale

Cosa possiamo dire di $m_x(\mathcal{O}_{X,x})$?

Sì, ed è vero di più:

$\forall\, I$ ideale di A_p, $I \neq A_p \Rightarrow I \subseteq m_p$

$\Big($ Se $x \in I$, $x \notin m_p$; $x = \frac{f}{g}$, $f \notin p \Rightarrow f \in S$

$\Rightarrow \frac{1}{f} \in A_p \Rightarrow x \cdot \frac{1}{f} \in I \Rightarrow \frac{1}{g} \in I \Rightarrow g \cdot \frac{1}{g} \in I$

$\Rightarrow 1 \in I \Rightarrow I = A_p$ contro l'ipotesi $\Big)$

Def: Un anello commutativo B si dice <u>locale</u> se $\exists\, m$ ideale di B t.c. $I \subseteq m$ $\forall\, I$ ideale di B (in particolare m è l'unico ideale massimale di B)

<u>Oss</u>: se A è Noetheriano $\Rightarrow A_p$ è noetheriano.

<u>dim</u>: dobbiamo mostrare che se J è un ideale di A_p allora J è finitamente generato come A_p-modulo

Sia $\varphi: A \longrightarrow A_p$ l'applicazione canonica

$$x \longmapsto \frac{x}{1}$$

È un omomorfismo di anelli $\Rightarrow \underline{I} = \varphi^{-1}(J)$ è un ideale di A. A è noetheriano $\Rightarrow \exists\, \alpha_1 \dots \alpha_k \in A$ t.c. $\underline{I}$ è generato da $\alpha_1 \dots \alpha_k$. Da questo segue facilmente che S è generato da $\frac{\alpha_1}{1}, \dots \frac{\alpha_n}{1}$.

<u>Corollario</u>: $x \in X$, X varietà affine

$\Rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ è Noetheriano.

<u>Oss</u>: $\varphi_x : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x} = \mathbb{K}[X]_{m_x}$

$f \longmapsto \frac{f}{1}$

$S = \{ g \in \mathbb{K}[X] : g(x) \neq 0 \}$

$h \in S$ $\exists U$ aperto non vuoto con $x \in U \subseteq X$

$h = 0$ su tutto U. Assumiamo X irriducibile

$$(f,g) \sim (f',g') \iff h f g' = h f' g \iff h(f g' - g f') \equiv 0$$

$h|_U$ è sempre diverso da zero.

$$\underset{\substack{\neq \\ 0}}{h(p)}\left(f(p) g'(p) - f'(p) g(p) \right) \in \mathbb{K}$$

$$\Rightarrow f g' - g f' = 0 \text{ su tutto } U$$

$$\Rightarrow U \subseteq \underbrace{V(f g' - g f')}$$

chiuso di Zariski

$$\Rightarrow \overline{U} \subseteq V(f g' - g f')$$

U è aperto non vuoto $(x \in U)$ di X, che è irriducibile per ipotesi $\Rightarrow$ U è denso in X

$\Rightarrow$ $V(fg' - gf') = X \Rightarrow fg' = gf'$ su X

In altre parole, per una varità irriducibile X, la relazione di equivalenza si riduce a quella naive $(f,g) \sim (f',g') \iff fg' = f'g$.

Spazi tangenti

X varietà affine ; $x \in X$

$X \subseteq \mathbb{A}^n \cong \mathbb{K}^n$. A meno di una traslazione ; $T^1, \dots T^n$ coordinate possiamo sempre supporre $x = (0, \dots 0)$ su $\mathbb{A}^n$

Sia L una retta per x. Vogliamo definire la molteplicità d'intersezione di L con X nel punto x.

$$L = \{ t\vec{v} \} \quad \vec{v} \in \mathbb{k}^n, \quad \vec{v} \neq \vec{0}$$

$$\overset{\shortparallel}{L_{\vec{v}}}$$

$$X = V(F_1 \dots F_k)$$

$$\begin{cases} F_1(tv^1, \dots tv^n) = \eta_1(t; v^1, \dots v^n) = \cancel{\eta_1^{(0)}} + \eta_1^{(1)} + \dots \\ \\ F_k(tv^1, \dots tv^n) = \eta_k(t; v^1 \dots v^n) = \cancel{\eta_k^{(0)}} + \eta_k^{(1)} + \dots \end{cases}$$

$$\eta_i^{(0)} = F_i(0, \dots 0) = 0 \quad (x = \vec{0} \in X)$$

$\eta_i^{(1)} = ?$

$$\eta_i^{(1)} = \sum \frac{\partial F_i}{\partial T^j}\Big|_{\vec{T}=\vec{0}} \cdot T^j \Big|_{\vec{T}=t\vec{v}} = t\left(\sum \frac{\partial F_i}{\partial T^j}\Big|_0 \cdot v^j\right)$$

$$\Big(\; F_i = \underset{\substack{\| \\ 0}}{\cancel{F_i^{(0)}}} + F_i^{(1)} + F_i^{(2)} + \dots$$

espansione di Taylor di F_i in $\vec{T} = (0, \dots 0)$

in $F_i(t\vec{v})$ il termine $F_i^{(k)}$ contribuisce con $t^k \dots$

è omogeneo di grado k nelle $T^1, \dots T^n$ $\Big)$

$\eta_i(t) = t^{\varepsilon_i}(a_i + \dots)$. Ovvero $t=0$ sarà una

$\uparrow$
$\neq 0$

radice di molteplicità $\varepsilon_i \geq 1$ per $\eta_i(t)$

Definisco la molteplicità di intersezione di $L_{\vec{v}}$ con X

come $\min(\varepsilon_i)$. Si dimostra facilmente che questo

è ben definito, cioè non dipende dai generatori scelti.

molt di intersez di L con X in $x=0$ è

$\{\min(\varepsilon_F) : F \in I_X\}$

Def: Diciamo che L è tangente a X in x

se $\mu(L \cap X) \geq 2$

$\mu_x(\ldots) \geq 2$

$\uparrow$

molt. intersezione

In concreto sto chiedendo che gli sviluppi di Taylor delle η_i partano con t^2...

ovvero $\eta_i^{(1)} \equiv 0$. Ovvero $\boxed{\sum \frac{\partial \eta_i}{\partial T_j} v^j = 0}$

Questo è un sistema di equazioni lineari in $\vec{v}$

$\Rightarrow \{ \vec{v} : L_{\vec{v}} \text{ sia tangente a } X \text{ in } x \} \cup \{\vec{0}\}$

uno spazio vettoriale. È semplicemente l'unione di tutte le L con L tangente a X in x.

<u>Def</u>: Lo spazio tangente a X in x è l'unione di tutte le rette tangenti a X in x.

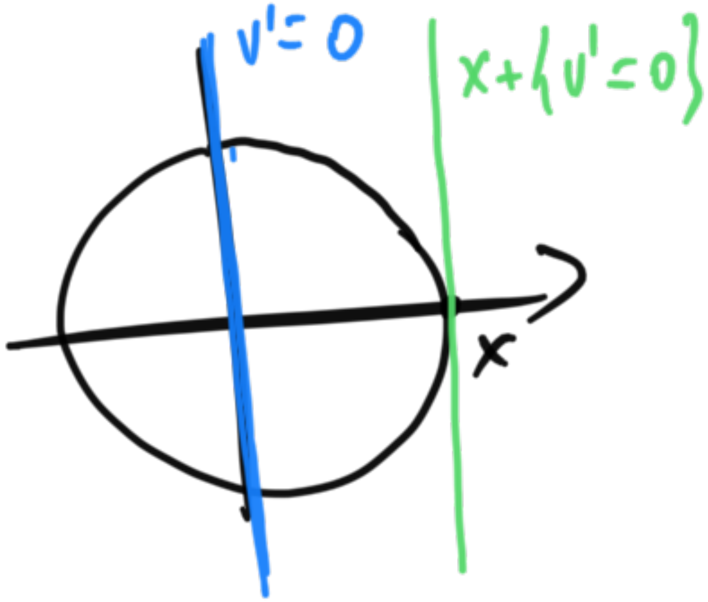
È l'insieme delle soluzioni del sistema lineare

$$\sum \frac{\partial f_i}{\partial T_j}\Big|_x v_j = 0 \text{. Si indica con } \Theta_{X,x}$$

<u>Esempi</u>: $X = \mathbb{A}^n$

$I_X = (0)$. Il sistema lineare che definisce $\Theta_{\mathbb{A}^n,0}$ è $0 \cdot \vec{v} = 0$. le cui soluzioni sono tutto $\mathbb{K}^n$.

Esempio: In $\mathbb{A}^2$, $X = \{x^2 + y^2 - 1 = 0\}$



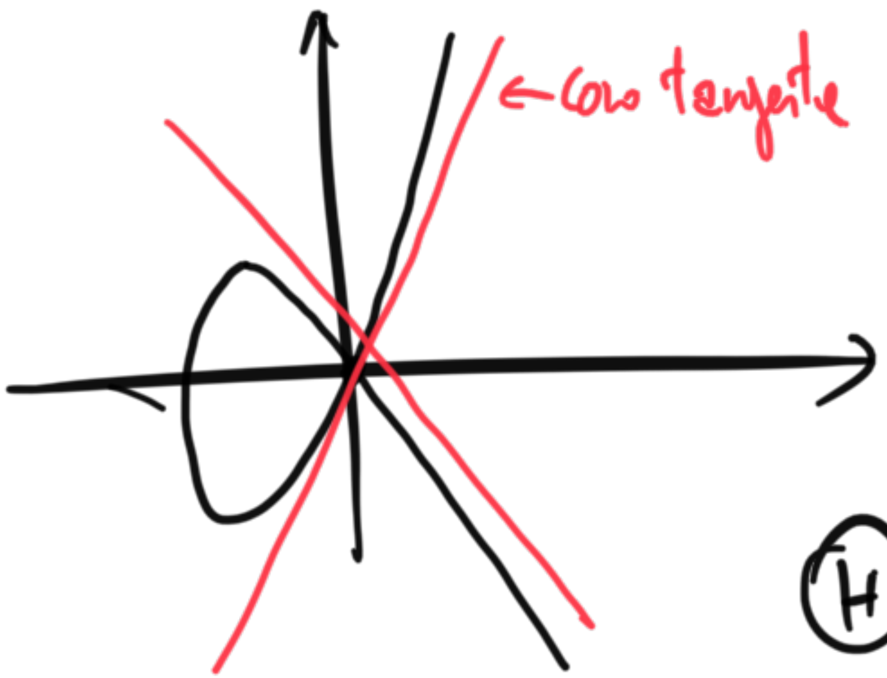
$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \cdot v^1 + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \cdot v^2 = 0$$

$$2v^1 + 0 \cdot v^2 = 0 \implies v^1 = 0$$

Ancora un esempio in $\mathbb{A}^2$, $X = \{y^2 - x^2(x+1) = 0\}$



$x = (0,0)$

$$\mathcal{H}_{X,0} = \mathbb{K}^2$$

$$\forall \vec{v} \neq 0 \qquad L_{\vec{v}} = \begin{pmatrix} tv^1 \\ tv^2 \end{pmatrix}$$

$$f(tv^1, tv^2) = t^2 (v^2)^2 - t^2 (v^1)^2 (tv^1 + 1)$$

$$= t^2 (\dots)$$

$$= t^2\left((v^2)^2 - (v^1)^2\right) + t^3(\dots)$$

$$\mu_0(L \cap X) \geq 2 \quad \forall \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}$$

$$(v^2)^2 - (v^1)^2 = 0$$

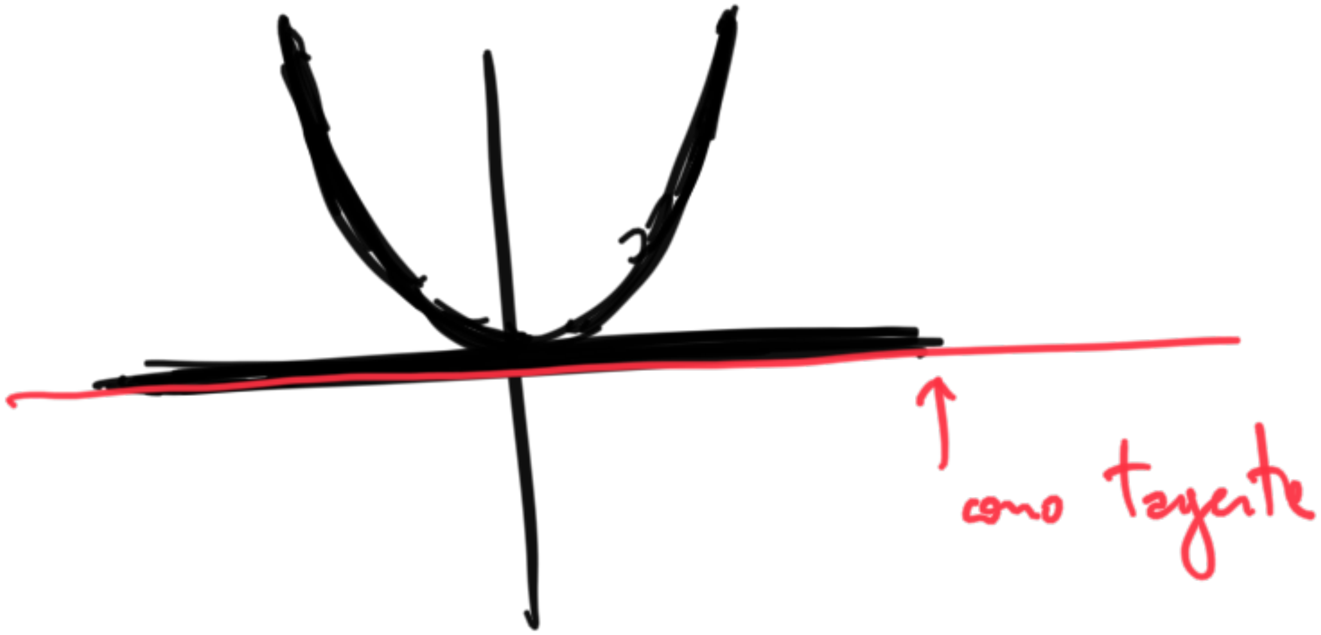
definisce il cono tangente a X in 0.

Ancora un esempio, sempre in $\mathbb{A}$

$$X = \{ y(y - x^2) = 0 \}$$

$$\parallel$$

$$y^2 - yx^2 = 0$$



$$\Theta_{X,0} = \mathbb{K}^2$$

<u>Notazione</u> : se $F \in \mathbb{K}[T^1, \dots T^n] = \mathbb{K}[\mathbb{A}^n]$

e $x = (x^1, \dots x^n) \in \mathbb{A}^n$

$$d_x F : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$\vec{v} \longmapsto \sum \frac{\partial F}{\partial T^j}\Big|_x v^j$$

$$d_x F \in (\mathbb{K}^n)^*$$

$\cdot T = x$

$$\mathbb{K}^n \simeq \mathcal{H}_{\mathbb{A}^n, x}$$

$$d_x : \mathbb{K}[\mathbb{A}^n] \longrightarrow \mathcal{H}^*_{\mathbb{A}^n, x}$$

Prendiamo ora $X \subseteq \mathbb{A}^n$

$$\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[\mathbb{A}^n] / I_X$$

$$0 \to I_X \to \mathbb{K}[\mathbb{A}^n] \xrightarrow{\ l_X\ } \mathbb{K}[X] \to 0$$

Ogni $g \in \mathbb{K}[X]$ ammette un rappresentante $G \in \mathbb{K}[\mathbb{A}^n]$

Se $x \in X$, sono tentato dal definire

$$d_x g := d_x G$$

vorrei fosse $d_x g : H_{X,x} \to \mathbb{k}$

è $d_x G : H_{\mathbb{A}^n,x} \to \mathbb{k}$

$H_{\mathbb{A}^n,x} = \mathbb{k}^n$

Per definizione, $H_{X,x}$ è un sottospazio lineare di $\mathbb{k}^n = H_{\mathbb{A}^n,x}$!

Un' idea miglior è

$$d_x g = d_x G \Big|_{H_{X,x}}$$

$\cdot \; \textcircled{H}_{X,x}$

$$d_x g : \textcircled{H}_{X,x} \longrightarrow \mathbb{k} \quad \text{lineare.}$$

Ed è ben definito! Ovvero, se $G_1\big|_X = g$

allora $\displaystyle dG_1\Big|_{\textcircled{H}_{X,x}} = dG\Big|_{\textcircled{H}_{X,x}}$

Infatti $G_1\big|_X = g$ significa $G_1\big|_X = G\big|_X$

ovvero $(G_1 - G)\big|_X \equiv 0 \implies G_1 - G \in I_X = (F_1, \dots F_n)$

$G_1 = G + A_1F_1 + \dots + A_nF_n$

$$G_1 = G + A_1 F_1 + \dots A_n F_n$$

$$d_x G_1 = d_x (G + A_1 F_1 + \dots + A_n F_n)$$

$$= d_x G + d_x A_1 \cdot \underset{\overset{\|}{0}}{F_1(x)} + A_1(x) d_x F_1 + \dots + d_x A_n \cdot \overset{\overset{0}{\|}}{F_n}(x)$$

$$+ A_n(x) dF_n(x)$$

$$x \in X = V(F_1, \dots F_n)$$

$$= d_x G + \underset{\overset{\|}{\alpha_1 \in \mathbb{k}}}{A_1(x)} \cdot d_x F_1 + \dots \underset{\overset{\|}{\alpha_n}}{A_n(x)} d_x F_n$$

$$d_x G_1 - d_x G = \alpha_1 d_x F_1 + \dots + \alpha_n d_x F_n$$

$\Theta_{X,x}$ è definito dalle equazioni $\begin{cases} d_x F_1(v) = 0 \\ \\ d_x F_n(v) = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \; d_x G\big|_{H_{x,x}} - d_x G_1\big|_{H_{x,x}} \equiv 0$$

$$d_x g := d_x G\big|_{H_{x,x}}$$ è ben definito.

$$d_x : \mathbb{K}[X] \longrightarrow H^*_{x,x}$$

$$d_x(g_1 + g_2) = d_x g_1 + d_x g_2$$

$$d_x(f \cdot g) = f(x) \cdot d_x g + g(x) \cdot d_x f$$

$$\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}[X]$$

$\uparrow$ costanti

$$d_x\big|_{\mathbb{K}} \equiv 0$$

$$\mathbb{K}[x] = \mathbb{K} \oplus m_x(\mathbb{K}[x])$$

$$f = \underset{\underset{\mathbb{K}}{\uparrow}}{f(x)} + (f - f(x))$$

$\uparrow$ si annulla in x

Quello che è interessante è

$$d_x : m_x(\mathbb{K}[x]) \longrightarrow \Theta^*_{X,x}$$

è lineare

i) $\quad d_x : m_x(\mathbb{K}[x]) \longrightarrow \Theta^*_{X,x}$ è suriettivo!

ii) $$0 \to \mathrm{Ker}(d_x) \longrightarrow m_x(\mathbb{K}[x]) \longrightarrow \mathcal{H}^*_{x,x} \to 0$$

è esatta ovvero

$$\mathcal{H}^*_{x,x} \cong m_x(\mathbb{K}[x]) / \mathrm{Ker}(d_x)$$

$$\mathrm{Ker}(d_x) = m_x(\mathbb{K}[x])^2$$

Quindi $$d_x : m_x(\mathbb{K}[x]) / m_x(\mathbb{K}[x])^2 \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^*_{x,x}$$

$\Rightarrow$ Posso definire $\mathcal{H}_{x,x}$ come $\left(m_x(\mathbb{K}[x]) / m_x(\mathbb{K}[x])^2 \right)^*$

iii)

$$d_x : \mathfrak{m}_x(\mathcal{O}_{X,x}) / \mathfrak{m}_x(\mathcal{O}_{X,x})^2 \xrightarrow{\sim} \Theta^*_{X,x}$$