Teorema: Sia X una varietà proiettiva liscia irriducibile di dim n, allora X si può realizzare come sottovarietà proiettiva di $\mathbb{P}^{2n+1}$

Lemma: $f: X \longrightarrow Y$ applicazione regolare finita biiettiva e t.c. $\forall x \in X$, $df_x : \Theta_{X,x} \longrightarrow \Theta_{Y,f(x)}$ sia iniettiva. Allora f è isomorfismo.

(proiettiva) liscia irriducibile

Cenno della dimostrazione: in geometria differenziale questo è il Teorema del Dini. Quindi è un risultato locale. Qui (in geometria algebrica) diventerà un risultato che coinvolge gli anelli locali.

[illegible] $\mathcal{O}_{x,X}$ e

$\mathcal{O}_{y,Y}$ dove $y = f(x)$. La finitezza di f serve a lavorare con un numero finito di funzioni in $\mathcal{O}_{x,X}$ (quindi esisterà un aperto U non vuoto sul quale sono tutte regolari).

L'ipotesi $df_x : \Theta_{x,X} \longrightarrow \Theta_{y,Y}$ sia iniettiva equivale $f^* : m_y/m_y^2 \longrightarrow m_x/m_x^2$ è suriettiva

Posso sollevare mediante f^* parametri locali per Y attorno a y a parametri locali per X attorno a x (e i parametri locali di Y saranno sufficienti)

Voglio dimostrare che (localmente) $f^* : \mathbb{K}[V] \longrightarrow \mathbb{K}[U]$

$V \subseteq Y$

è un isomorfismo.

Sia $X \subseteq \mathbb{P}^N$ e sia $p \in \mathbb{P}^N \setminus X$

Allora possiamo considerare la proiezione

$$\pi_p : \mathbb{P}^N \dashrightarrow \mathbb{P}^{N-1}$$

non è definita in p

iperpiano che non contiene il punto p

$$\pi_p\big|_X : X \longrightarrow \mathbb{P}^{N-1}$$

$$\pi_p\big| : X \longrightarrow \pi_p(X) \quad \text{è finita}$$

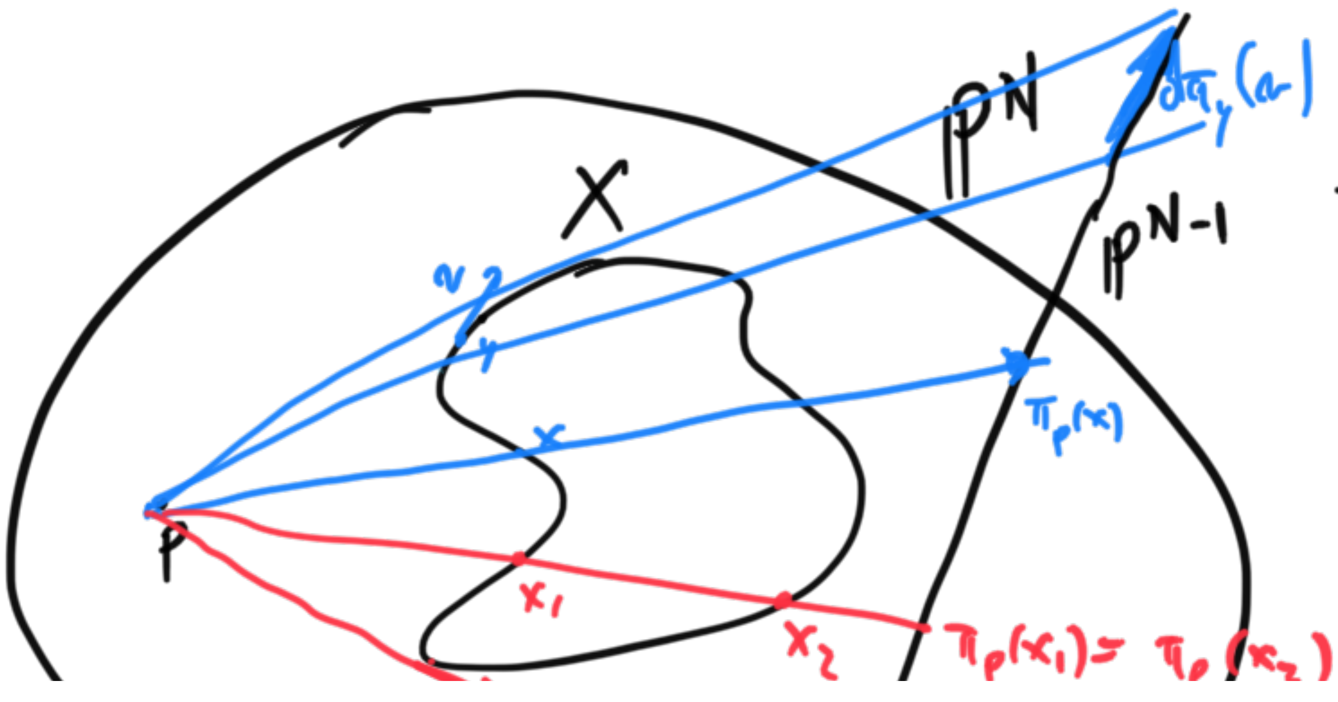
Vediamo quand'è che $\pi_p|_X$ è

i) biiettiva da X in $\pi_p(X)$

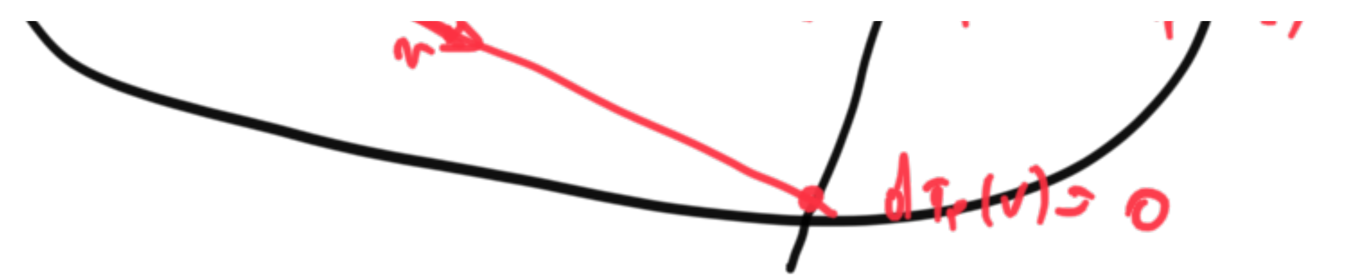
ii) con differenziale iniettivo $d\pi_{p_x} : \Theta_{X,x} \longrightarrow \Theta_{\pi_p(X), \pi_p(x)}$

i') iniettiva da $X \longrightarrow \mathbb{P}^{N-1}$

ii') con differenziale iniettivo $d\pi_{p_x} : \Theta_{X,x} \longrightarrow \Theta_{\mathbb{P}^{N-1}, \pi_p(x)}$



p, x_1, x_2 sono allineati in $\mathbb{P}^N$



π_p non soddisfa la condizione i') se e solo se

$\exists\ (x_1, x_2)$ distinti in $X \times X$ t.c. (p, x_1, x_2) siano allineati in $\mathbb{P}^N$

π_p non soddisfa la condizione ii') se e solo se esistono un punto $x \in X$ e un vettore tangente v in $\Theta_{x,x}$ t.c. $p \in$ retta per x con vettore direttore v.

Equivalentemente $p \in \overline{\Theta}_{x,x}$. (sia come retta per x con vettore v che con $\Theta_{x,x}$ come sottoinsieme di $\mathbb{P}^N$ stiamo in effetti pensando alle loro chiusure)

Cerchiamo di capire com'è fatto il luogo $Z \subset \mathbb{P}^N$

dei punti p "cattivi". $Z = Z_1 \cup Z_2$

cattivi per i) — cattivi per ii)

$$\Gamma = \{(x_1, x_2, p) \ , \ \underset{x_1 \neq x_2}{x_1, x_2 \in X} \ , \ p \in \mathbb{P}^N \text{ t.c. } \underset{\text{siano allineati}}{x_1, x_2, p} \}$$

$$\Gamma \subseteq X \times X \times \mathbb{P}^N$$

$$\Gamma \xrightarrow{\pi_{X \times X}} X \times X \setminus \text{diag} \quad ; \quad \Gamma \xrightarrow{\pi_{\mathbb{P}^N}} \mathbb{P}^N$$

$$p \in Z_1 \iff p \in \pi_{\mathbb{P}^N}(\Gamma)$$

$$\dim \Gamma = ?$$

Sia $\Gamma_{(x_1,x_2)}$ la fibra di Γ sopra il punto (x_1,x_2) di $X \times X \setminus \mathrm{diag}$.

$$\dim \Gamma_{(x_1,x_2)} \geq \dim \Gamma - \dim (X \times X \setminus \mathrm{diag})$$

$$\begin{aligned}\dim \Gamma &\leq \dim \Gamma_{(x_1,x_2)} + \dim (X \times X \setminus \mathrm{diag}) \\ &= \dim \Gamma_{(x_1,x_2)} + \dim (X \times X) \\ &= \dim \Gamma_{(x_1,x_2)} + 2 \dim X \\ &= 1 + 2n\end{aligned}$$

$\Gamma_{(x_1,x_2)}$ è la retta proiettiva passante per x_1 e x_2

Se $N > 2n+1 \Longrightarrow \dim Z_1 < \dim \mathbb{P}^N$

$\Rightarrow \underset{\neq \emptyset}{\exists}\, U$ aperto di $\mathbb{P}^N$ t.c. $\forall p \in U$

p soddisfa i)

Per ii) considero $\tilde{\Gamma} = \{ (x,p) \quad x \in X,\ p \in \mathbb{P}^N,\ p \in \overline{H_{X,x}} \}$

$$
\begin{array}{ccc}
\tilde{\Gamma} & \longrightarrow & \mathbb{P}^N \\
\downarrow & & \\
X & &
\end{array}
\qquad Z_2 = \pi_{\mathbb{P}^N}(\tilde{\Gamma})
$$

$\tilde{\Gamma}_x$ fibra su $x \in X$ di $\tilde{\Gamma}$

$\dim \tilde{\Gamma}_x \geq \dim \tilde{\Gamma} - \dim X \qquad \tilde{\Gamma}_x = \overline{H_{X,x}}$

$\dim \Gamma \leq \dim \Gamma_x + \dim X$

$= 2 \dim X = 2n$

X liscia

$\Rightarrow \dim \mathcal{H}_{X,x} = \dim X$

Se $N > 2n \Rightarrow \dim Z_2 < \dim \mathbb{P}^N$ $\exists$

aperto $\underset{\neq \emptyset}{V} \subseteq \mathbb{P}^N$ t.c. $\forall p \in V$ soddisfa ii')

Basta prendere l'aperto (non vuoto) $U \cap V$ per avere

punti che soddisfano sia i) che ii')

Voglio $N > \{2n, 2n+1\}$ ovvero semplicemente $N > 2n+1$

Se questa condizione è soddisfatta

$$X \xrightarrow{\sim} \pi_p(X) = X_1 \subseteq \mathbb{P}^{N-1}$$

$\cap$

$\mathbb{P}^N$

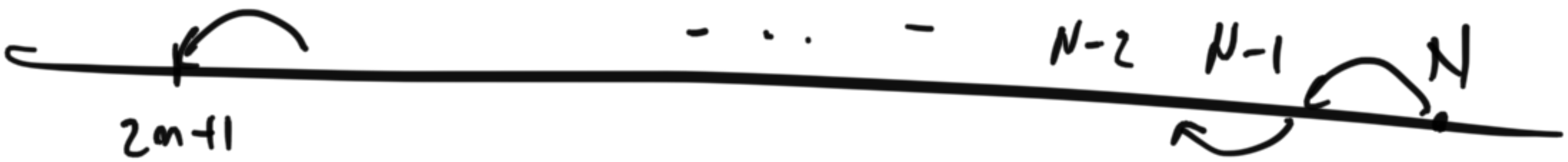
Se $N-1 > 2n+1$ vado avanti

$$X_1 \xrightarrow{\sim} X_2 \subseteq \mathbb{P}^{N-2}$$

...

Posso andare avanti fino a che

$$X_k \subseteq \mathbb{P}^M \quad \text{con} \quad M > 2n+1$$



la dimensione dell'ambiente $\mathbb{P}^M$ scende esattamente di 1 a ogni passo

Dopo un certo numero di passi

$$X \cong X_u \subseteq \mathbb{P}^{2n+1}$$

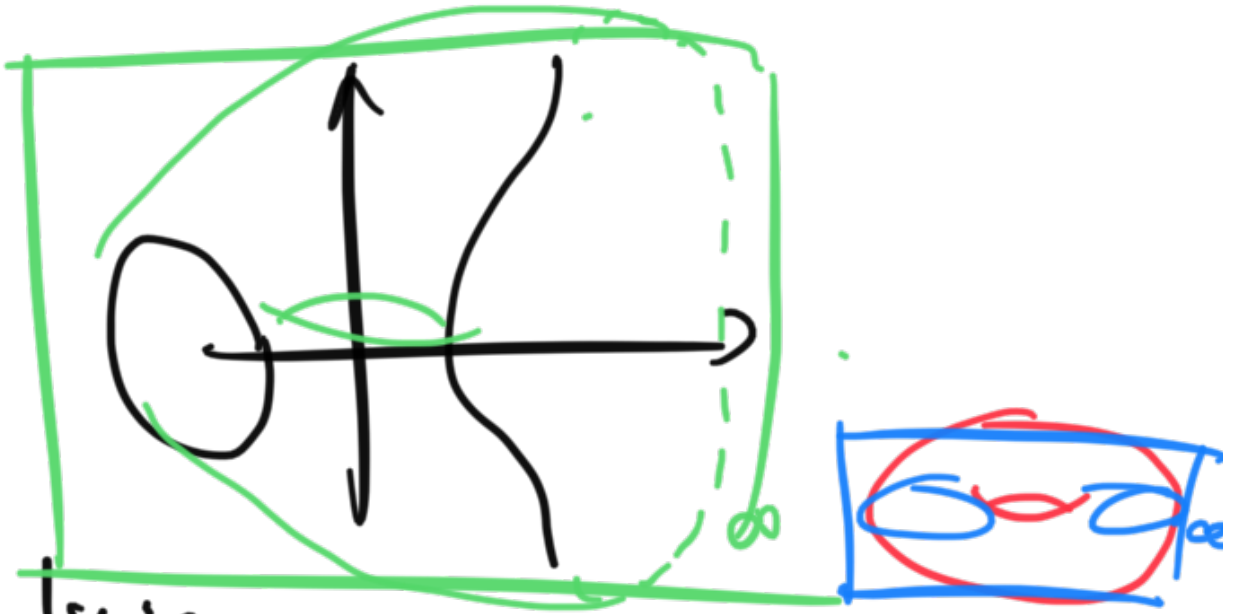
$2n+1$ è ottimale?

Per una data varietà potrebbe non essendo

Es: $X = \mathbb{P}^1$ $\quad n = 1 \rightarrow 2n+1 = 3$

il Teorema mi dice che $\mathbb{P}^1$ si può immergere in $\mathbb{P}^3$. Ma ovviamente $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^1$ (in particolare $\mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^2$)

Es: $X = \overline{\{ y^2 = x(x-1)(x+1) \}}$



X è una curva proiettiva liscia

X è una curva piana $X \subseteq \mathbb{P}^2$

dim $X = 1$. Il teorema dà la stima $X \subseteq \mathbb{P}^3$

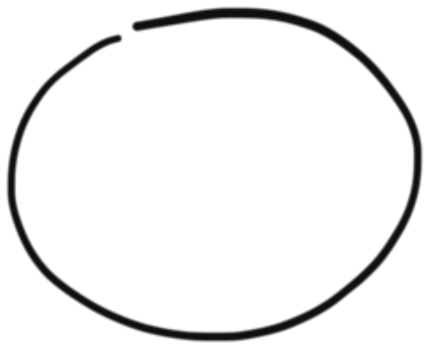
Oss: In generale X curva proiettiva liscia

$\Rightarrow X \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ (nota 3 è la dimensione

data dal teorema $3 = 2 \cdot 1 + 1$), ma $X \not\hookrightarrow \mathbb{P}^2$

Infatti ad ogni curva proiettiva liscia è associato un intero non negativo detto <u>genere</u> della curva, ed esistono curve di ogni genere possibile.

Se siamo su $\mathbb{C}$, X è una varietà compatta orientata di dim reale $2 \Rightarrow$ X è una superficie compatta orientata e questo genere è il genere della topologia "il numero di buchi"



$g=0$

$g=1$

$g=2$

$g=3$

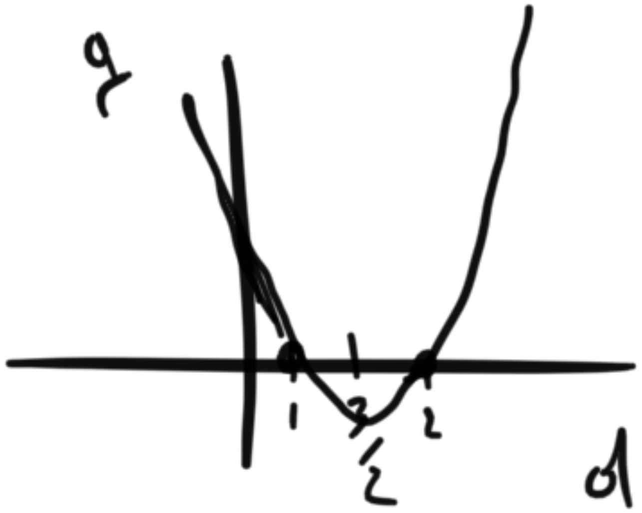
$\dots$

Vale il seguente fatto: se $X \subseteq \mathbb{P}^2$ e il grado di (del polinomio che definisce) X è d

Allora
$$g(X) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} = \frac{1}{2}\left(d^2-3d+2\right)$$

d	g
1	0
2	0
3	1
4	3

← si salta il genere 2



Teoremi di Bertini

Irriducibilità e non singolarità delle fibre di un morfismo regolare

$f: X \longrightarrow Y$ $\quad X, Y$ irriducibili non singolari

X_y fibra di f in $y \in Y$, X_y è irriducibile?

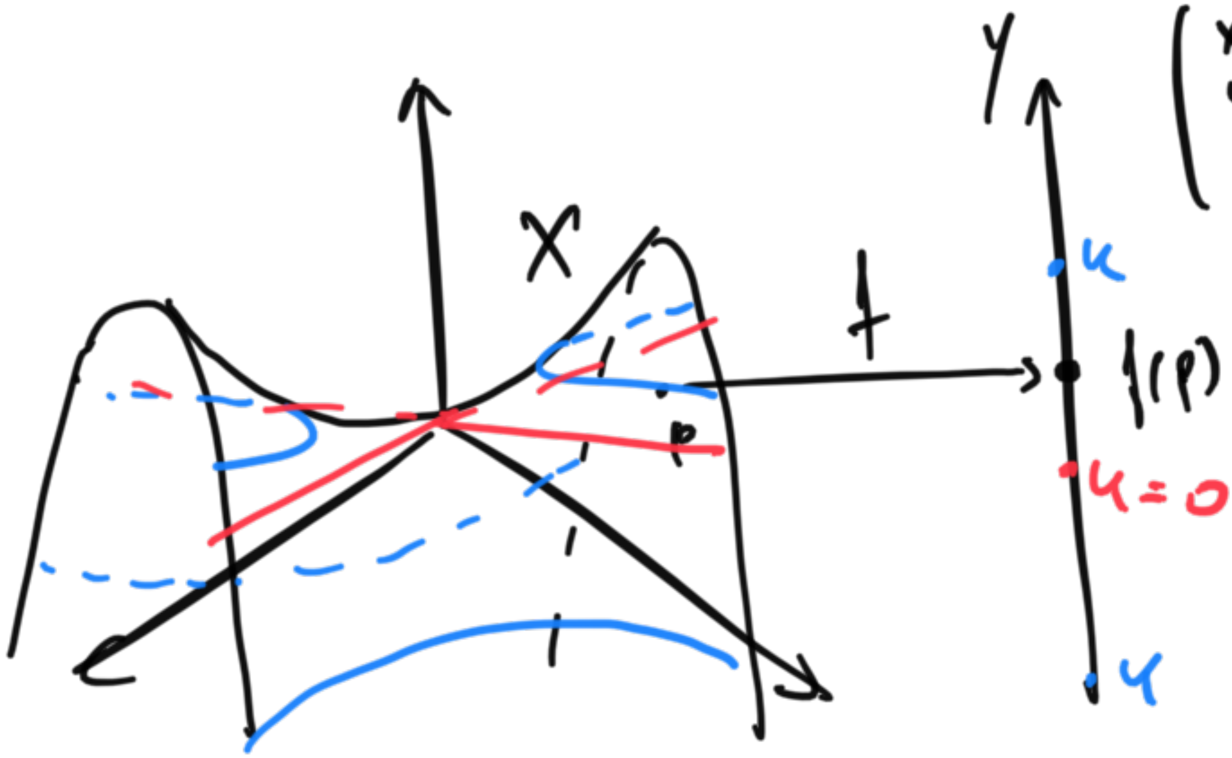
X_y fibra di f in $y \in Y$; X_y è irriducibile ?

è non singolare ?

<u>Esempio</u> $\quad X \subseteq \mathbb{A}^3 \qquad\qquad Y = \mathbb{A}^1$

$$X = \{ z = x^2 - y^2 \} \longrightarrow Y$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto z$$



$$X_u = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{cases} z = x^2 - y^2 \\ z = u \end{cases} \right\} \longleftrightarrow \{ (x,y) \in \mathbb{A}^2 : x^2 - y^2 = u \}$$

Per $u \neq 0$ $\quad X_u$ è liscia irriducibile

Per $u = 0$ $\quad x^2 - y^2 = 0 \iff (x-y)(x+y) = 0$

riducibile, singolare.

Quello che accade in questo esempio è che

$\exists\, U$ aperto non vuoto di Y t.c.

$\forall\, y \in U$ si ha che X_y è liscia irriducibile.

Il teorema di Bertini per l'irriducibilità delle fibre

Es: (esempio catastrofico) $f : \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{A}^1$

$t \longmapsto t^2$

$\mathbb{A}^1_k = \{t : t^2 = k\}$; se $k \neq 0$

$\mathbb{A}^1_k$ consiste esattamente in due punti

$\Rightarrow \mathbb{A}^1_k$ non è mai irriducibile se $k \neq 0$.

Il teorema di Bertini sull'irriducibilità delle fibre dice qualcosa del tipo: $\exists\, U \subseteq Y$ aperto non vuoto t.c. X_y è irriducibile $\forall\, y \in U$, a meno che non accada qualcosa di catastrofico come nell'esempio qui sopra

Come si dimostra che una varietà affine è birazionalmente equivalente a una ipersuperficie?

$K(X) \cong K(\underbrace{t_1, \dots t_r}_{\substack{\text{algebricamente} \\ \text{indipendenti}}}, t_{r+1})$ $\quad$ t_{r+1} soddisfa un equazione polinomiale a coeff in K

del tipo $\quad t_{r+1}^m = \sum_{i=0}^{m-1} a_i(t_1 \dots t_r) t_{r+1}^i \quad$ $a_i(t_1 \dots t_m) \in K[t_1 \dots t_r]$

$\Rightarrow$ X è birazionalmente equivalente

a $\tilde{X} \subseteq \mathbb{A}^{r+1}$ definita dall'unica

equazione $F(t_1 \dots t_{r+1}) = t_{r+1}^m - \sum a_i(t_1 \dots t_r) t_{r+1}^i = 0$.

$X \longrightarrow *$ è birazionalmente equivalente a

$\tilde{X} \subseteq \mathbb{A}^{r+1}$ definita da una sola equazione a

coeff in $\mathbb{K} = \mathbb{K}[*]$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "\sim"] \arrow[drr] & \tilde{X} \arrow[r, hook] & \mathbb{A}^{r+1} \arrow[d] \\ & & * \end{tikzcd}$$

$f: X \longrightarrow Y$ dominante $\left(\begin{array}{l} \mathbb{K}(Y) \overset{f^*}{\hookrightarrow} \mathbb{K}(X) \\ \mathbb{K}[Y] \hookrightarrow \mathbb{K}[X] \end{array} \right)$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "\sim"] \arrow[drr, "f"'] & \tilde{X} \arrow[r, hook] & \mathbb{A}^{r+1} \times Y \arrow[d, "\pi_Y"] \\ & & Y \end{tikzcd}$$

$\tilde{X}$ è definita da un'unica equazione

$$(*) \quad t_{r+1}^{n} - \sum a_i(y, t_1 \dots t_r)\, t_{r+1}^{i} = 0$$

$$a_i(y, t_1 \dots t_r) \in \mathbb{K}[Y][u_1 \dots u_r]$$

A meno di passare a un aperto U di X possiamo supporre che f si fattorizzi come

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{A}^{r+1} \times Y \arrow[d, "\pi_Y"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

con X definito da un'unica equazione del tipo $(*)$.

$\to Y$

Rivediamo l'esempio catastrofico in questa luce

$$\begin{tikzcd}
t \arrow[r, mapsto] & (t,t^2) \\
\mathbb{A}^1 \arrow[r] \arrow[dr] & \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 \arrow[d] \\
& \mathbb{A}^1
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
t \arrow[dr, mapsto] & \\
& t^2
\end{tikzcd}$$

$$\{(t,t^2) \subseteq \mathbb{A}^2\} = \{y = x^2\}$$

$x^2 - y$ è un polinomio nella variabile x a coefficienti in $\mathbb{K}[y]$

$x^2 - y$ è irriducibile come polinomio a coefficienti in $\mathbb{K}[y]$.

è irriducibile anche come polinomio a coefficienti in $\mathbb{K}(y)$.

è <u>riducibile</u> come polinomio a coeff. in $\overline{\mathbb{K}(y)}$

$\uparrow$

chiusura algebrica

chiusura algebrica

di $\mathbb{K}(y)$.

$$\sqrt{y} \in \overline{\mathbb{K}(y)}$$

$$x^2 - y = (x - \sqrt{y})(x + \sqrt{y})$$

La catastrofe che non deve accadere perché valga il teorema di Bertini sull'irriducibilità delle fibre è che il polinomio (*) $t_{r+1}^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i(y, t_1, \dots t_r)\, t_r^i$ $\overline{F}$

sia riducibile quando lo vediamo come polinomio a coeff. in $\overline{\mathbb{K}(y)}[t_1, \dots t_r]$

|| Penso a F come polinomio in $\overline{\mathbb{K}(y)}[t_1 \dots t_{r+1}]$

e voglio che sia irriducibile.

Dimostriamo ora come se questa ipotesi è verificata vale il Teorema di Bertini

$$X \subseteq Y \times \mathbb{A}^{r+1} \quad \text{definita dall'equazione}$$

$$F(y, t_1 \dots t_{r+1}) = 0$$

e per ipotesi F è irriducibile come polinomio a coeff in $\overline{\mathbb{K}(Y)}$ nelle variabili $t_1 \dots t_{r+1}$

Sia $y_0 \in Y$. $\quad X_{y_0} = ? \quad X_{y_0} \underset{\sim}{\subseteq} \mathbb{A}^{r+1}$

X_{y_0} è (isomorfo al) luogo $(t_1 \dots t_{r+1}) \in \mathbb{A}^{r+1}$

che soddisfano l'equazione $F(y_0; t_1 \dots t_{r+1}) = 0$

X_{y_0} è irriducibile $\Longleftrightarrow$ $F(y_0; t_1 \dots t_{r+1}) \in \mathbb{K}[t_1, \dots t_{r+1}]$

è irriducibile.

I polinomi a coeff nel campo $\mathbb{L}$ di grado

fissato k, formano uno spazio proiettivo $\mathbb{P}^N(\mathbb{L})$

I polinomi riducibili sono l'immagine in questo $\mathbb{P}^N(\mathbb{L})$

dei prodotti $\mathbb{P}^{N_1}(\mathbb{L}) \times \dots \times \mathbb{P}^{N_h}(\mathbb{L}) \longrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{L})$

che corrispondono a fare il prodotto di polinomi.

se campi algebricamente chiusi!!!

Un morfismo regolare tra varietà proiettive ha immagine chiusa $\Rightarrow$ i polinomi riducibili di grado K sono un chiuso. (O sono tutti riducibili o la maggior parte è irriducibile)

$\Rightarrow$ Il luogo dei polinomi riducibili di grado K sarà definito da un sistema di equazioni omogenee nei loro coefficienti

$$\left\{ R_i(a_0(p) \dots a_M(p)) = 0 \right\}$$

$a_i(p)$ sono i coeff di $p \in \mathbb{K}[t_1 \dots t_{n+1}]$

Queste equazioni sono indipendenti da $\mathbb{L}$.

Per ipotesi $F(y, t_1 \dots t_{r+1}) \in \overline{\mathbb{K}(y)}[t_1 \dots t_{r+1}]$ è irriducibile $\Rightarrow \exists\, i_0 : R_{i_0}(a_0(F) \dots a_m(F)) \neq 0 \in \overline{\mathbb{K}(y)}$

Ma $F \in \mathbb{K}[y][t_1 \dots t_{r+1}]$

$\Rightarrow a_i(F) \in \mathbb{K}[y]$

$\Rightarrow R_{i_0}(a_0(F) \dots a_m(F)) \in \mathbb{K}[y] \hookrightarrow \mathbb{K}(y) \hookrightarrow \overline{\mathbb{K}(y)}$

$q(y)$ $\quad \neq 0$

$\exists\, y_0 \in Y : R_{i_0}(a_0(F(y_0)) \dots a_m(F(y_0))) \neq 0$

$\Rightarrow X_{y_0}$ è irriducibile.

Sia $U = \{ q(y) \neq 0 \}$ è un aperto non vuoto di Y

X_y è irriducibile $\forall y \in U$.
