$x \in X$, $X \subseteq \mathbb{A}^n$ varietà affine

$$\mathcal{O}_{X,x} = \{ f/g \ , \ f,g \in \mathbb{K}[X], \ g(x) \neq 0 \}$$

$$\mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$
$$f \longmapsto f/1$$

$m_x(\mathbb{K}[X]) \subseteq \mathbb{K}[X]$, massimale

$m_x(\mathcal{O}_{X,x}) \subseteq \mathcal{O}_{X,x}$ massimale ; $m_x(\mathcal{O}_{X,x})$ è l'unico ideale massimale di $\mathcal{O}_{X,x}$.

$m_x(\mathbb{K}[X]) = \{f : f(x) = 0\}$

$m_x(\mathcal{O}_{X,x}) = \{ f/g = \varphi : f(x) = 0 \} = \{\varphi : \varphi(x) = 0\}$ Inoltre se $I \subseteq \mathcal{O}_{X,x} \Rightarrow I \subseteq m_x(\mathcal{O}_{X,x})$

$$d_x : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \Theta^*_{X,x}$$

Poiché $d_x\big|_{\mathbb{K}} \equiv 0$, l'informazione interessante è tutta contenuta in $d_x : m_x(\mathbb{K}[X]) \longrightarrow \Theta^*_{X,x}$

i) $d_x : m_x(\mathbb{K}[X]) \longrightarrow \Theta^*_{X,x}$ è suriettiva

$\forall\ \varphi : \Theta_{X,x} \longrightarrow \mathbb{K}$ lineare, $\exists\ f \in m_x(\mathbb{K}[X])$ t.c. $d_x f = \varphi$.

$X \subseteq \mathbb{A}^n$; $\Theta_{X,x} \subseteq \mathbb{K}^n = \Theta_{\mathbb{A}^n,x}$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[r, "\exists \tilde{\varphi}"] & \mathbb{K} \\
\Theta_{X,x} \arrow[u, hook] \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

Problema: $\exists ?\ \tilde{F} \in \mathbb{K}[\mathbb{A}^n]$ t.c. $d_x \tilde{F} = \tilde{\varphi}$

$\mathbb{K}[t^1, \dots t^n]$ dato dalle derivate parziali $\left.\frac{\partial \tilde{F}}{\partial t_i}\right|_x$

$\tilde{F}$ esiste sicuramente (possiamo prendere $\tilde{F} = \tilde{\varphi}$ visto come polinomio omogeneo di grado 1). Sia ora $F = \tilde{F} - \tilde{F}(x)$

Allora $F(x) = 0 \Rightarrow F \in m_x(\mathbb{K}[\mathbb{A}^n])$ inoltre $d_x F =$

$= d_x\tilde{F} - \underbrace{d_x(\tilde{F}(x))}_{\text{costante}} = d_x\tilde{F} = \varphi$

Sia $f = F|_X$. $f(x) = F(x) = 0 \Rightarrow f \in m_x(\mathbb{K}[X])$

$d_x f = (d_x F)|_{\Theta_{X,x}} = \tilde{\varphi}|_{\Theta_{X,x}} = \varphi$

ii) $\mathrm{Ke}\{d_x : m_x(\mathbb{K}[X]) \longrightarrow \Theta^* \} = ?$

(c) $\ker\{d_x : m_x(\mathbb{K}[X]) \longrightarrow \Theta_{X,x}\} = \ .$

Sia $g \in m_x(\mathbb{K}[X])$ t.c. $d_x g = 0$

Sia $G \in \mathbb{K}[\mathbb{A}^n]$ t.c. $G|_X = g$.

$$0 = d_x g = d_x G\big|_{\Theta_{X,x}} \Rightarrow d_x G\big|_{\Theta_{X,x}} \equiv 0$$

$$\Theta_{X,x} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} d_x F_1 \\ \vdots \\ d_x F_k \end{pmatrix} \quad \text{dove } (F_1, \dots, F_k) = I_X$$

$$\begin{array}{c} d_x G : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K} \\ \quad\ \ \rotatebox{90}{=} \\ \quad\ \ \Theta_{\mathbb{A}^n,x} \end{array}$$

$$\Rightarrow d_x G = \lambda_1 d_x F_1 + \lambda_2 d_x F_2 + \dots \lambda_k d_x F_k$$

$$= d_X(\lambda_1 F_1 + \dots + \lambda_k F_k)$$

Sia $\tilde{G} = G - (\lambda_1 F_1 + \dots + \lambda_k F_k)$

$F_i|_X = 0$

$$\tilde{G}|_X = G|_X - \lambda_1 F_1|_X - \dots - \lambda_k F_k|_X$$

$$= G|_X$$

$$\Rightarrow \quad g = \tilde{G}|_X$$

$$\tilde{G}(x) = G(x) = g(x) = 0$$

$$d_x\tilde{G} = d_x G - \lambda_1 d_x F_1 - \dots - \lambda_k d_x F_k = 0$$

Quindi $\tilde{G}$ è un polinomio nelle variabili $t^1 \dots t^n$

che i) si annulla in x

ii) il cui differenziale si annulla in x

$\Rightarrow$ Lo sviluppo di Taylor di $\tilde{G}$ in x comincia

con i termini quadratici in $(t^i - x^i)$

$$\left((t^i - x^i)\right)_i = m_x(\mathbb{K}[\mathbb{A}^n])$$

$$\Rightarrow \left((t^i - x^i)\cdot(t^j - x^j)\right)_{i,j} = m_x(\mathbb{K}[\mathbb{A}^n])^2$$

$$m_x(\mathbb{K}[X]) = \left(t^i\big|_X - x^i\right)_i$$

$$m_x(\mathbb{K}[X])^2 = \left((t^i|_X - x^i)(t^j|_X - x^j)\right)_{i,j}$$

$$g = \tilde{G}\big|_X \Rightarrow g \in m_x(\mathbb{K}[X])^2$$

$$\ker\left(d_x : m_x(\mathbb{K}[X]) \longrightarrow \Theta^*_{X,x}\right) \subseteq m_x(\mathbb{K}[X])^2$$

L'inclusione opposta è ovvia, ne segue

$$\ker\left(d_x : m_x(\mathbb{K}[X]) \longrightarrow \Theta^*_{X,x}\right) = m_x(\mathbb{K}[X])^2$$

Ne segue
$$m_x(\mathbb{K}[X]) \big/ m_x(\mathbb{K}[X])^2 \xrightarrow[\sim]{d_x} \Theta^*_{X,x}$$

Si può estendere la definizione di $d_x : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \Theta^*_{X,x}$

a $d_x : \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow \Theta^*_{X,x}$

$h \in \mathcal{O}_{X,x}$, $h = f/g$, $f, g \in \mathbb{K}[X]$; $g(x) \neq 0$

dobbiamo definire $d_x\left(f/g\right)$. La definiamo come

$$d_x\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g(x)\, d_x f + f(x)\cdot d_x g}{g(x)^2}$$

$d_x : \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow \Theta^*_{X,x}$ ha ancora tutte le proprietà che aveva prima.

In particolare $f = F|_X$; $g = G|_X$ $G(x) = g(x) \neq 0$

$$\frac{f}{g} = \frac{F}{G}\bigg|_X$$

$$d_x \frac{f}{g} = d_x \left(\frac{f}{\bar{g}} \right) \Big|_{\Theta_{X,x}}$$

Si riadatta passo passo la dimostrazione fatta prima e si ricava

$$\frac{m_x(\mathcal{O}_{X,x})}{m_x(\mathcal{O}_{X,x})^2} \xrightarrow[\sim]{d_x} \Theta^*_{X,x}$$

In questo modo abbiamo dimostrato che $\Theta^*_{X,x}$, e quindi $\Theta_{X,x}$, è una costruzione <u>locale</u> su X.

$f : X \longrightarrow Y$ morfismo regolare

$x \in X \quad , \quad y = f(x) \in Y$

$$f^* : \mathbb{K}[Y] \longrightarrow \mathbb{K}[X]$$

$g \in m_y(\mathbb{K}[Y]) \;;\; (f^* g)(x) = g(f(x)) = g(y) = 0$

$$f^* : m_y(\mathbb{K}[Y]) \longrightarrow m_x(\mathbb{K}[X])$$

Se $g \in m_y(\mathbb{K}[Y])^2 \quad g = \sum h_i k_i \quad h_i, k_i \in m_y(\mathbb{K}[Y])$

$$f^* g = f^*\left(\sum h_i k_i\right) = \sum (f^* h_i)\cdot(f^* k_i) \in m_x(\mathbb{K}[X])^2$$

$$f^* : m_y(\mathbb{K}[Y]) / m_y(\mathbb{K}[Y])^2 \longrightarrow m_x(\mathbb{K}[X]) / m_x(\mathbb{K}[X])^2$$

[illegible] $g(y) \neq 0 \Rightarrow (f^* g)(x) = g(f(x)) = g(y) \neq 0$

$O_{y,y}$: se $g(y)\neq 0 \Rightarrow (f^* g)(x) = g(f(x))$, $g(y) \neq 0$

$f^* : O_{Y,y} \longrightarrow O_{X,x}$ e possiamo ripetere il ragionamento

$$\begin{tikzcd}
\dfrac{m_y(O_{Y,y})}{m_y(O_{Y,y})^2} \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "d_y"', "\wr"] & \dfrac{m_x(O_{X,x})}{m_x(O_{X,x})^2} \arrow[d, "d_x", "\wr"'] \\
H^*_{Y,y} \arrow[u, bend right, "d_y^{-1}"'] \arrow[r, "H^*_{f,x}"] & H^*_{X,x}
\end{tikzcd}$$

$H^*_{f,x}$ è definita da $d_x \circ f^* \circ d_y^{-1}$

Passando ai duali ottengo un'applicazione lineare

$$\Theta_{f,x} : \Theta_{X,x} \longrightarrow \Theta_{Y,f(x)}$$

Identifichiamo $\Theta_{f,x}$. Scriviamo seguente m_x, m_y per $m_x(\mathcal{O}_{X,x})$ e $m_y(\mathcal{O}_{Y,y})$. Abbiamo

$$\begin{tikzcd}
d_x(f^*g) = \Theta^*_{f,x}(d_y g) & \Theta^*_{X,x} & & \Theta^*_{Y,y} \arrow[ll, "\Theta^*_{f,x}"'] & d_y g \arrow[llll, bend right, mapsto] \\
& m_x/m_x^2 \arrow[u, "d_x", "\wr"'] & & m_y/m_y^2 \arrow[ll, "f^*"] \arrow[u, "d_y"', "\wr"] & \\
f^*g \arrow[uu, mapsto] & & & & g \arrow[llll, bend left, mapsto] \arrow[uu, mapsto]
\end{tikzcd}$$

$$\Theta_f^*(d_y g)(v) = d_x(f^*g)(v) \qquad v \in \Theta_{X,x}$$

$d_y g\,(\Theta_f(v))$ $\quad\quad$ $d_x(g\circ f)(v)$

$\quad\quad\quad\quad$ $\|$ $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $\|$

$$\frac{\partial g}{\partial y^i}\cdot \Theta_f(v)^i \qquad\qquad \left.\frac{\partial g}{\partial y^i}\right|_f\cdot \frac{\partial f^i}{\partial x^j} v^j$$

$$\Rightarrow \Theta_{f,x}(v)^i = \frac{\partial f^i}{\partial x^j} v^j$$

$\Theta_{f,x}$ è proprio l'applicazione lineare rappresentata dalla matrice jacobiana di f.

(A volte si scrive direttamente $\Theta_{f,x} = d_x f$, oppure $\Theta_{f,x} = J_x(f)$)

D ... di Θ

Proprietà di $\textcircled{H}_f$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

$$x \longmapsto y \longmapsto z$$

$$\begin{tikzcd} \textcircled{H}_{g\circ f, x} : \textcircled{H}_{X,x} \arrow[rr] \arrow[dr, "\textcircled{H}_{f,x}"'] \arrow[rr, phantom, shift right=4ex, "\supseteq"] & & \textcircled{H}_{Z,z} \\ & \textcircled{H}_{Y,y} \arrow[ur, "\textcircled{H}_{g,y}"'] & \end{tikzcd}$$

Immediato da $(g\circ f)^* = f^* \circ g^*$

Altra proprietà di $\textcircled{H}_{f,x}$ è $\textcircled{H}_{id,x} = id_{\textcircled{H}_{X,x}}$

Segue da: $id^* = id$

i) $H_{id} = id$

ii) $H_{f \circ g} = H_f \circ H_g$

H è funtoriale

H : varietà puntate $\rightsquigarrow$ Spazi vettoriali

$$\begin{tikzcd}
(X, x) \arrow[d, "f"] & H_{X,x} \arrow[d, "H_f"] \\
(Y, y) & H_{Y,y}
\end{tikzcd}$$

Conseguenza : se $(X, x) \simeq (Y, y)$ allora $H_{X,x} \cong H_{Y,y}$

Vale di più: se $x \in U \subseteq X$; $y \in V \subseteq Y$

e $(U, x) \cong (V, y) \Rightarrow \mathcal{O}_{U,x} = \mathcal{O}_{V,y}$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{U,x} & = & \mathcal{O}_{V,y} \\ \| & & \| \\ \mathcal{O}_{X,x} & & \mathcal{O}_{Y,y} \end{array}$$

Ovvero se due varietà sono localmente isomorfe allora i loro spazi tangenti in un punto e nel punto corrispondente sono isomorfi.

Corollario: se X è una varietà affine con un punto $x \in X$ t.c. $\dim \mathcal{O}_{X,x} = n$, X non è isomorfa a nessuna sottovarietà affine di $\mathbb{A}^m$ con

$m < n$. Infatti se $X \xrightarrow[\sim]{f} Y \subseteq \mathbb{A}^m$

$\Rightarrow \Theta_{X,x} \cong \Theta_{Y,f(x)} \leq \mathbb{K}^m$. Assurdo.

$\uparrow$

dim n

Ancora un'osservazione.

$\mathbb{P}(V)$. $V \cong \mathbb{K}^{n+1}$ per qualche n

quindi $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) \Rightarrow$ localmente $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{A}^n$

$\Rightarrow \Theta_{\mathbb{P}(V),L} \cong \mathbb{K}^n$

$$\mathbb{P}(V) = V \setminus \{0\} / \mathbb{K}^*$$

$$\pi : V \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}(V)$$

Se z è una base per $L = [z]$

$$\pi : z \longmapsto L$$

$$\Theta_{\pi,z} : \underbrace{\Theta_{V \setminus \{0\}, z}}_{\cong V} \longrightarrow \Theta_{\mathbb{P}(V), L}$$

Il nucleo di questa applicazione è proprio L

$$\rightsquigarrow \quad \Theta_{\mathbb{P}(V), L} \cong V/L$$

Sia X una varietà affine. $X \subseteq \mathbb{A}^n$

Definiamo la fibrazione tangente di X, Θ_X

come $\Theta_X \subseteq X \times \mathbb{A}^n$

$$H_X = \{ (x, v) : v \in H_{x,X} \}$$

$$H_X = \bigcup_{x \in X} H_{x,X}$$

H_X è una varietà algebrica! È definita dalle equazioni $\frac{\partial f_i}{\partial T^j}(T^1, \dots T^n) \cdot v^j = 0$

che sono polinomiali in $T^1, \dots T^n, v^1 \dots v^n$

(in particolare sono lineari in $v^1 \dots v^n$)

$$\begin{tikzcd} H_X \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend left, "\pi_2"] & X \times \mathbb{A}^n \arrow[r, "\pi_2"] & \mathbb{A}^n \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{cc} \searrow^{\pi_1} & \downarrow{\scriptstyle \pi_1} \\ & X \end{array}$$

$\pi_1 : H_X \longrightarrow X$ è una mappa regolare e suriettiva.

$$\pi_1^{-1}(x) = H_{X,x}$$

$\Rightarrow$ $\exists$ una dimensione generica delle fibre di π_1!

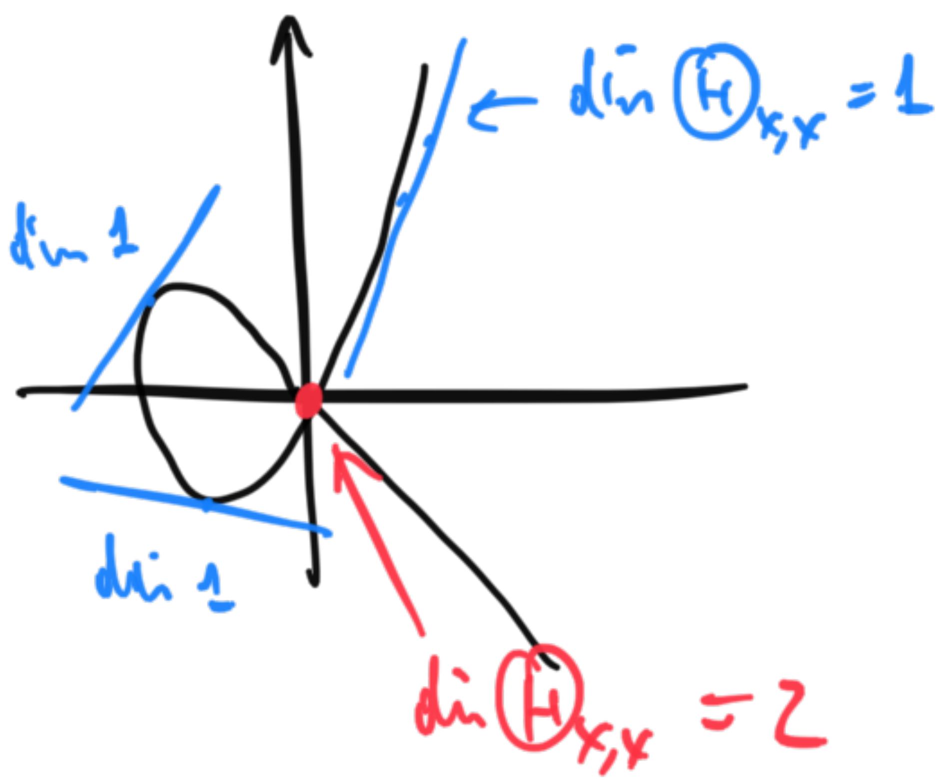
Più precisamente: $\exists\, s \geq 0$ $\exists\, U \neq \emptyset$ aperto di X tale che

i) $\dim \pi_1^{-1}(x) \geqslant s$

ii) $\dim \pi_1^{-1}(x) = s$ su tutto U

X irriducibile $\Rightarrow U$ è denso.

<u>Es</u>: $y^2 = x^2(x+1)$



Ovvero $\exists\, s$: $\dim \Theta_{X,x} \geq s \quad \forall x \in S$

$\dim \Theta_{X,x} = s$ su tutto U

Def: x si dice liscio o non singolare se $\dim \Theta_{X,x} = s$

o singolare se $\dim \Theta_{X,x} > s$.

è singolare ... dim $\Theta_{X,x}$ ...

Il caso di una ipersuperficie

$X \subseteq \mathbb{A}^n$; $X = V(F)$ $\quad F \equiv 0$, F non costante

$\Theta_{X,x}$ è definito dall'equazione lineare $\left.\dfrac{\partial F}{\partial t^i}\right|_x \cdot v^i = 0$

$$\dim \Theta_{X,x} = \begin{cases} n-1 & \text{se } \left(\left.\dfrac{\partial F}{\partial t^1}\right|_x, \dots, \left.\dfrac{\partial F}{\partial t^n}\right|_x \right) \neq (0, \dots, 0) \\ n & \text{se } \left(\left.\dfrac{\partial F}{\partial t^1}\right|_x, \dots, \left.\dfrac{\partial F}{\partial t^n}\right|_x \right) = (0, \dots, 0) \end{cases}$$

i) Ritrovo la definizione di punto singolare come punto in cui si annullano tutte le derivate parziali di F

... 1.

ii) La dimensione generica di $\Theta_{X,x}$ è $n-1$, ovvero coincide con la dimensione di tutte le componenti irriducibili di X.

<u>Teorema</u>: Sia X una varietà quasi-proiettiva irriducibile. Allora $\exists\, U \subseteq X$ aperto tale che

$$\dim \Theta_{X,x} = \dim X \quad \forall\, x \in U$$

I punti singolari di X sono pertanto quelli con $\dim \Theta_{X,x} > \dim X$. Inoltre i punti singolari di X formano una sottovarietà chiusa di X.

<u>Dim</u>: Possiamo supporre X affine. Sia $d = \dim X$

Allora X è birazionale a una ipersuperficie Y di $\mathbb{A}^{d+1}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "f"] & Y \\ U \arrow[u, hook] \arrow[r, "f", "\sim"'] & V \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

$$\forall\, x \in U, \quad \Theta_{f,x} : \underset{\Theta_{U,x}}{\overset{\shortparallel}{\Theta_{X,x}}} \xrightarrow{\sim} \underset{\Theta_{V,f(x)}}{\overset{\shortparallel}{\Theta_{Y,f(x)}}}$$

Y è una ipersuperficie $Y = V(F)$, $F \in \mathbb{K}[\mathbb{A}^{d+1}]$

$\Rightarrow \exists\, W^{\neq\emptyset}$ aperto di Y t.c. $\forall\, y \in W$

vale $\dim \Theta_{Y,y} = \dim Y = d$

Y irriducibile (V è denso in Y e $V \cong U$, U irriducibile)

$\downarrow$

$V \cap W$ è non vuoto (e denso)

$f : U \to V$ era un isomorfismo

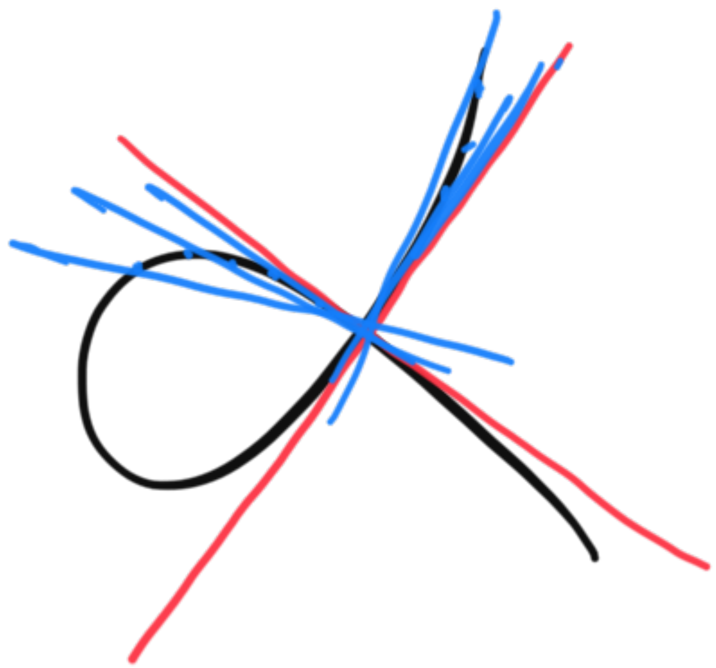
$\Rightarrow f|_{f^{-1}(V \cap W)} : f^{-1}(V \cap W) \longrightarrow V \cap W$ è un isomorfismo.

In particolare $f(V \cap W)$ è un aperto non vuoto di X. Chiamiamolo $\tilde{U}$.

$\forall\, x \in \tilde{U}$ vale

$$\dim \mathcal{O}_{X,x} = \dim \mathcal{O}_{Y,f(x)} = d = \dim X.$$

L'interpretazione geometrica del cono tangente



Il cono tangente è l'unione di tutte le rette per x che sono limite di secanti.