L'immersione di Segre (Grado)

$$\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(W) \hookrightarrow \mathbb{P}(V \otimes W)$$

$$V \times W \longmapsto V \otimes W$$

$$(v, w) \longmapsto v \otimes w$$

$v_1 = \lambda v \quad ; \quad w_1 = \mu w$

$$(v_1, w_1) \longmapsto \lambda\mu \cdot v \otimes w$$

$[v_1] = [v] \in \mathbb{P}(V)$

$[w_1] = [w] \in \mathbb{P}(W)$

$$[v_1 \otimes w_1] = [v \otimes w] \in \mathbb{P}(V \otimes W)$$

$$([v_1], [w_1]) \neq ([v], [w]) \Longrightarrow [v_1 \otimes w_1] \neq [v \otimes w]$$

ovvero se v_1 non è linearmente dip da v oppure w_1 non è lin. dip. da w, allora $v_1 \otimes w_1$ non è lin dip da $v \otimes w$

Suppniamo v, v_1 linearmente indip in V e w e w_1 lin indip in W

$\mathcal{B}_V = \{e_1, e_2, \dots e_n\}$ $\quad$ $\mathcal{B}_W = \{f_1, f_2, \dots f_m\}$

$e_1 = v$, $e_2 = v_1$ $\quad$ $f_1 = w$, $f_2 = w_1$

$v \otimes w$, $v_1 \otimes w_1$ sono elem distinti in una base di $V \otimes W$

$\Rightarrow$ sono linearmente indip.

Se v e v_1 sono lin indip e $w_1 = \lambda w$ $\quad \lambda \neq 0$

$v \otimes w$ e $v_1 \otimes w$ sono lin indip

$v_1 \otimes w_1 = \lambda v_1 \otimes w$ $\quad$ $v \otimes w$ e $\lambda v_1 \otimes w$ sono lin. indip

$\Downarrow$ $v \otimes w$ e $v_1 \otimes w_1$ sono indip.

Verifichiamo che

$\mathrm{Seg}\left(\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(W)\right)$ in $\mathbb{P}(V \otimes W)$ sia

$\mathrm{Segre}(\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(W))$ ... è

una varietà proiettiva.

Mettiamoci in coordinate $\mathcal{B}_V = \{e_0 \dots e_n\}$

$\mathcal{B}_W = \{f_0 \dots f_m\}$

$$v = x^i e_i = \left(\sum_{i=0}^{n} x^i e_i \right)$$

$$w = y^j f_j$$

$$v \otimes w = x^i y^j \, e_i \otimes f_j$$

$$\left([(x^i)], [(y^j)] \right) \longmapsto [(x^i y^j)]$$

Se w^{ij} sono coordinate su $\mathbb{P}(V \otimes W)$

la varietà di Segre è caratterizzata da

$w^{ij} = x^i y^j$ per qualche $(x^i), (y^j)$

Questo implica $w^{ij} \cdot w^{kl} = x^i y^j x^k y^l = x^i y^l x^k y^j$
$= w^{il} \cdot w^{kj}$

$(w^{ij}) \rightsquigarrow W$ che ha w^{ij} in posizione (i,j)

allora le equazioni $w^{ij} = x^i y^j$ sono equivalenti

a $W = \begin{pmatrix} x^0 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} (y^0 \cdots y^n)$

$\iff \operatorname{rg}(W) = 1$

Poiché $W \neq 0$ $\operatorname{rg}(W) = 1$ è equivalente a

$\operatorname{rg}(W) \leq 1 \iff$ tutti i minori 2×2 di W

sono 0.

$$
W = \begin{array}{c|cc} & k & l \\ \hline i & w^{ik} & w^{il} \\ j & w^{jk} & w^{jl} \end{array} \rightsquigarrow w^{ik}w^{jl} - w^{jk}w^{il} = 0
$$

Es: $\dim V = \dim W = 2$; $\dim V \otimes W = 4$

$$
\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^3
$$

$$
[x:y] \quad [z:w] \longrightarrow \left([\underset{t^0}{\underset{\shortparallel}{xz}} : \underset{t^1}{\underset{\shortparallel}{xw}} : \underset{t^2}{\underset{\shortparallel}{yz}} : \underset{t^3}{\underset{\shortparallel}{yw}}]\right)
$$

$$
Q = \{ t^0 t^3 = t^1 t^2 \}
$$

Oss: la quadrica $t^0t^3 - t^1t^2 = 0$

ha come matrice dei coefficienti

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ quindi è non degenere

Su $\mathbb{C}$ ogni quadrica non degenere in 4 variabili

è equivalente a $(t^0)^2 + (t^1)^2 + (t^2)^2 + (t^3)^2$

quindi sono tutte equivalenti

Quindi se $Q \subseteq \mathbb{P}^3$ è una quadrica non

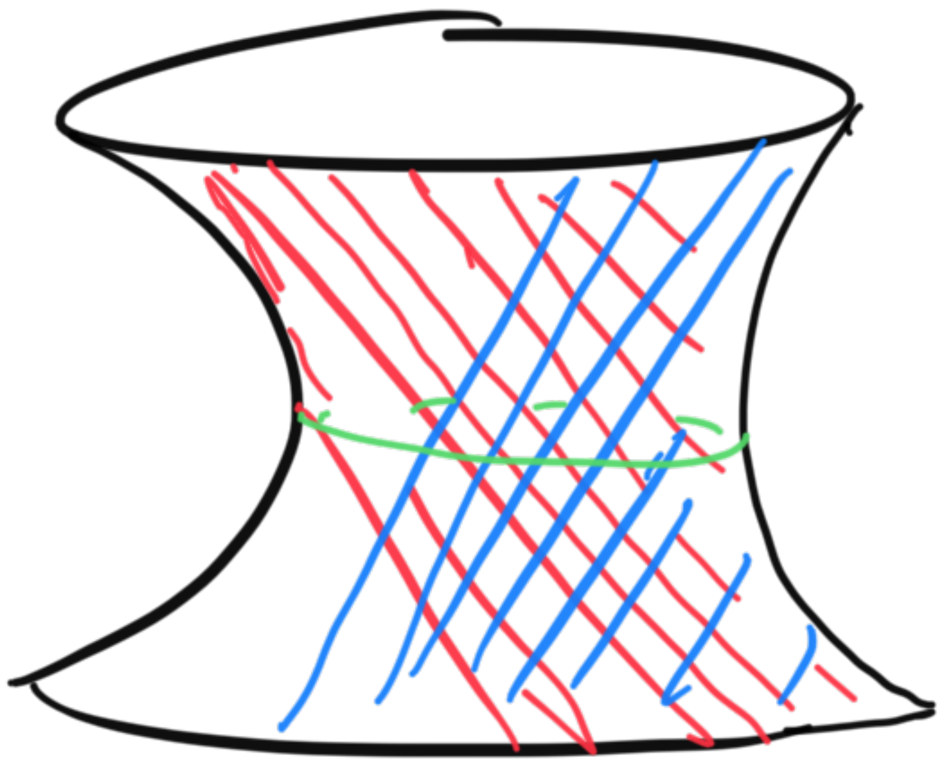
degenere. Allora $Q = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

$\mathbb{P}^1$ è la retta proiettiva $\Rightarrow$ Q è doppiamente rigata (su Q ci sono **due** famiglie di rette (proiettive))

Disegno reale: $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = S^1$

$$\mathbb{A}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

Iperboloide (certa quadrica non degenere in $\mathbb{R}^3$)



Sottovarietà proiettive di $\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(W)$

$$\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(W) \hookrightarrow \mathbb{P}(V \otimes W)$$

Z sottovarietà proiettiva di $\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(W)$ è

$$Z = \tilde{Z} \cap \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V) \subseteq \mathbb{P}(V \otimes W)$$

↑ varietà proiettiva in $\mathbb{P}(V \otimes W)$

$\tilde{Z}$ è luogo di zeri di polinomi omogenei nelle variabili w_{ij}

$\Rightarrow$ Z è luogo di zeri di polinomi che sono omogenei nei monomi $x^i y^j$

$\Rightarrow$ sono polinomi omogenei separatamente nelle (x^i) e nelle (y^j) (biomogenei)

Es: grado 2 nelle x^i e grado 1 nelle y^j

$$p(x^0, x^1, x^2 ; y^0, y^1, y^2, y^3) = y^1 \cdot ((x^0)^2 + x^1 x^3) - y^0 (x^2)^2$$

$p = 0$ è una ipersuperficie di bigrado $(2,1)$ in $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^3$.

<u>Corollario</u>: Una sottovarietà di $\mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m$

è luogo di zeri di equazioni $g_k(x,y)$ omogenee nelle variabili x^i (e libere nelle variabili y^i)

<u>Def</u>: X è una varietà <u>quasiproiettiva</u> se X è un aperto in una varietà proiettiva $\tilde{X}$.

<u>Teorema</u>: $f : X \longrightarrow Y$ f regolare X, Y varietà quasiproiettive. Se X è proiettiva, allora per ogni chiuso Z di X,

$f(t)$ è chiuso in Y.

Ovvero: se $f: \underset{\uparrow \atop \text{proiettiva}}{X} \longrightarrow \underset{\uparrow \atop \text{quasi proiett}}{Y}$ è regolare $\Rightarrow f$ è chiusa.

<u>Oss</u>: Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, allora X liscia ha una naturale struttura di varietà olomorfa (teorema del Dini olomorfo). $\mathbb{P}^n$ come varietà olomorfa (con la topologia euclidea ereditata da $\mathbb{C}^n$) è <u>compatta</u>. X proiettiva $\Rightarrow X$ chiusa in un compatto $\Rightarrow X$ è compatta nella topologia euclidea.

Allo stesso modo, $\mathbb{P}^n$ con la topologia euclidea è di Hausdorff $\Rightarrow$ una varietà quasiproiettiva in

$\mathbb{C}$ è di Hausdorff nella topologia euclidea.

Un piccolo ripasso di topologia

X , la diagonale di $X \times X$

è $\Delta_X = \{ (x,x) , x \in X \}$

X è di Hausdorff $\Longleftrightarrow$ Δ_X è chiusa in $(X \times X, \tau_{\text{prodotto}})$

Se prendo poi $\mathbb{A}^n, \tau_{\text{zariski}}$

$(\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n, \tau_{\text{zariski}}) \simeq (\mathbb{A}^{2n}, \tau_{\text{zariski}})$

$$\not\cong$$

$$\left(\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n, \tau_{Zariski} \times \tau_{Zariski}\right)$$

Tuttavia $\Delta_{\mathbb{A}^n}$ è chiuso in $\left(\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n, \tau_{Zariski}\right)$!

$$p = (x^1, \dots x^n, y^1 \dots y^n) \in \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$$

$$p \in \Delta_{\mathbb{A}^n} \iff (x^1, \dots x^n) = (y^1 \dots y^n)$$

$$\iff \begin{cases} x^1 = y^1 \\ x^2 = y^2 \\ \vdots \\ x^n = y^n \end{cases} \qquad I_{\Delta_{\mathbb{A}^n}} = ((x^i - y^i))$$

Diremo che $\mathbb{A}^n$ è <u>separato</u> (la diagonale è chiusa nella

Topologia di Zariski
del prodotto)

Con la diagonale separa i punti
di $\mathbb{A}^n$ nel senso che la
condizione $\vec{x} = \vec{y}$ è equivalente
alla condizione $(\vec{x}, \vec{y}) \in \Delta_{\mathbb{A}^n}$ (e quindi $\vec{x} \neq \vec{y}$ è
equivalente a $(\vec{x}, \vec{y}) \notin \Delta_{\mathbb{A}^n}$)

In termini colloquiali c'è un sistema di equazioni
polinomiali che separa i punti.

Altro esempio

$\Delta_{\mathbb{P}^n} \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$

$([x^0 : \dots x^n], [y^0 : \dots y^n]) \in \Delta_{\mathbb{P}^n}$

$$\Downarrow$$

$(x^0, \dots x^n)$ e $(y^0 \dots y^n)$ sono linearmente dipendenti

$$\iff \operatorname{rg}\begin{pmatrix} x^0 & \dots & x^n \\ y^0 & \dots & y^n \end{pmatrix} \leq 1 \to \{ x^i y^j = x^j y^i \quad \forall i,j \}$$

$\to$ Anche $\mathbb{P}^n$ è separato

X proiettiva $\to$ X separata $\quad (X \hookrightarrow \mathbb{P}^n)$

$$\Big(\Delta_X = \underbrace{X \times X \cap \Delta_{\mathbb{P}^n}}_{\text{chiuso in } X \times X} \Big)$$

$\uparrow$ chiuso in $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$

X quasi proiettiva $\to$ X è separata

$$\Big(X \hookrightarrow \underset{\text{proiettiva}}{\tilde{X}} \quad ; \quad \Delta_X = X \times X \cap \Delta_{\tilde{X}} \Big)$$

Il grafico di $f : X \longrightarrow Y$ $\quad X, Y$ spazi topologici

è $\Gamma_f = \{ (x, f(x)) , x \in X \} \subseteq X \times Y$

Se f è continua e Y è di Hausdorff allora

Γ_f è chiuso in $X \times Y$

$$q = (x,y) \in \Gamma_f \iff y = f(x) \iff \underset{Y \times Y}{\underset{\cap}{(f(x), y)}} \in \Delta_Y$$

$$(f(x), y) = (f, id)(x, y)$$

$$(f(x), y) \in \Delta_Y \iff (x,y) \in (f, id)^{-1}(\Delta_Y)$$

$$\underset{\text{continua}}{(f, id)} : X \times Y \longrightarrow \underset{\Delta_Y \text{ è chiuso in } Y \times Y}{Y \times Y}$$

$$\Gamma_f = \underset{\text{continua}}{(f, id)}^{-1} (\underset{\text{chiuso}}{\Delta_Y}) \Rightarrow \Gamma_f \text{ è chiuso.}$$

Corollario (nel senso di è la stessa dim)

$f : X \to Y$ regolare, Y quasiproiettiva

$\Rightarrow \Gamma_f$ è un chiuso di $(X \times Y, \text{Zariski})$

(oss: $\varphi : Z \to W$ è regolare e $T \subseteq W$ è chiuso $\Rightarrow$ $\varphi^{-1}(T)$ è chiuso di Z.

T è luogo degli zeri di $g_j(w^1 \dots w^m)$

$$\varphi : \begin{pmatrix} z^1 \\ \vdots \\ z^n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{matrix} w^1(\vec{z}) \\ \vdots \\ w^m(\vec{z}) \end{matrix} \qquad \varphi^{-1}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} z^1 \\ \vdots \\ z^n \end{pmatrix} \text{ t.c. } g_j(w^1(\vec{z}) \dots w^m(\vec{z})) = 0 \right\}$$

equazioni polinomiali nelle (z^i).)

Torniamo alla topologia

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_f \arrow[r, hook] \arrow[d, bend right, "\pi_1"'] \arrow[d, phantom, "\cong"] & X \times Y \arrow[d, "\pi_2"] \\
X \arrow[u, bend right, "(id, f)"'] \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dashed] & Y
\end{tikzcd}$$

Se Y è di Hausdorff

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\sim"] \arrow[rr, bend left, "\varphi_f"] & \Gamma_f \arrow[r, hook] & X \times Y
\end{tikzcd}$$ è un'immersione

(f continua) chiusa (Γ_f è un chiuso di $X \times Y$)

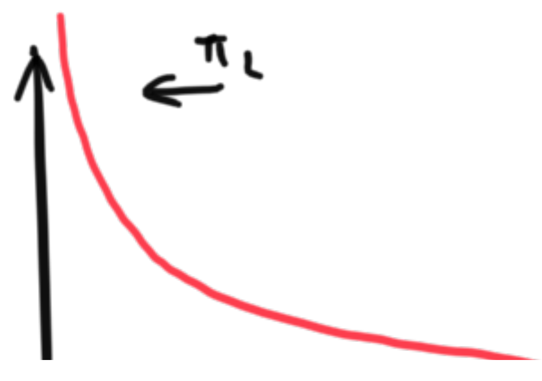
$$f = \pi_2 \circ \varphi_f \quad \text{con} \quad \varphi_f \text{ immersione chiusa } X \xhookrightarrow{\varphi_f} X \times Y$$

Torniamo alla topologia algebrica: stesso enunciato dove ora Y è quasiproiettiva e f è regolare

Oss: se $\pi_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ è chiusa $\Longrightarrow$

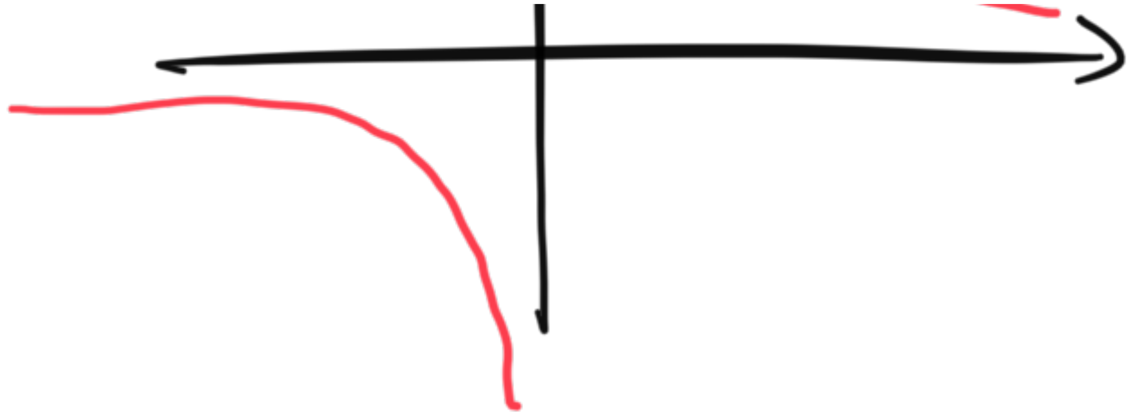
f è chiusa (composizione di applicazioni chiuse)

In generale $\pi_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ si guarda bene dall'essere chiusa! Es $X = Y = \mathbb{R}, \tau_{Eucl}$ $\quad X \times Y = \mathbb{R}^2, \tau_{Eucl}$



$Z \subseteq X \times Y$

$Z = \{(x,y) : xy = 1\}$



Z è chiuso, ma $\pi_2(Z) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ che non è chiuso.

Questo è anche un esempio algebrico

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 & \xrightarrow{\pi_2} & \mathbb{A}^1 \\ \cup & & \\ Z = \{(x,y) : xy = 1\} & & \end{array}$$

è un chiuso di Zar.

$\pi_2(Z) = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ che non è un chiuso di Zar.

Se $X = K$ è compatto $\Rightarrow$ $\pi_2 : X \times Y \to Y$ è chiusa

(anzi: $X \times Y \xrightarrow{\pi_2} Y$ è chiusa $\forall Y \Longleftrightarrow X$ è compatto)

Corollario: $f: X \to Y$ continua, X compatto, Y di Hausd.

$\Rightarrow f$ è chiusa

Lemma $\pi_2 : \mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m \longrightarrow \mathbb{A}^m$ è chiusa! (tutto con Zariski)

dim: Z chiuso di $\mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m$

Z è luogo di zeri di equazioni $g_i(x, y)$

omogenee nelle x.

$y_0 \in \mathbb{A}^m$ è $\pi_2(Z)$? Questo accade se e solo se

$\exists\, x \in \mathbb{P}^n : \{g_i(x, y_0) = 0\} \neq \emptyset$

per y_0 fissato questo è un sistema di equazioni omogenee nelle x. $\to$ è una sottovarietà proiettiva di $\mathbb{P}^n$.

Nullstellensatz proiettivo $\Rightarrow$ $\{g_i(x, y_0) = 0\} = \emptyset \iff$

$$(g_i(x,y_0)) \supseteq I_s = (\text{ideale generato dai monomi di grado } s \text{ nelle } x)$$

Riassumendo $\quad y_0 \in \pi_2(Z) \iff (g_i(x,y_0)) \not\supseteq I_s \quad \forall s$

Sia $T_s \subseteq \mathbb{A}^n$ definito da

$$y_0 \in T_s \iff \{(g_i(x,y_0)) \not\supseteq I_s\}$$

$$\pi_2(Z) = \bigcap_{s \in \mathbb{N}} T_s$$

Dimostriamo che per un fissato valore di s, T_s è chiuso in $\mathbb{A}^n$. Ne seguirà che $\pi_2(Z)$ è intersezione di chiusi

A. Ne segue che $\pi_2(Z)$ è ...

$\Rightarrow \pi_2(Z)$ è chiuso.

Cerchiamo di caratterizzare la condizione $I_s \subseteq ((g_i(x, y_0))$

T_s sarà definito dalla condizione complementare.

$I_s \subseteq (g_i(x, y_0)) \iff$ ogni monomio m di grado s nelle

x si può scrivere

$$m = \sum g_i(x, y_0) \cdot f_{i,m}(x)$$

g_i è omogeneo di grado k_i nelle x; non è restrittivo

supp. $f_{i,m}$ è omogeneo di grado $s-k_i$ $\rightarrow$ $f_{i,m}$ è

combinazione lineare (su $\mathbb{K}$) dei monomi omogenei di

grado $s-k_i$ nelle x. $\quad f_{i,m} = \sum \alpha_{j,m} n_{ij}$

$$m = \sum \underset{\in K}{\alpha_{jm}} \underbrace{g_i(u, y_0)\, n_{ij}}_{\text{omogeneo di grado } s \text{ nelle } u}$$

omogeneo di grado s nelle variabili u

Al variare di m, l'insieme $\{m\}$ genera lo spazio vett V_s su K dei polinomi omogenei di grado s nelle u.

$$I_s \subseteq (g_i(u, y_0)) \iff \{g_i(u,y_0)\, n_{ij}\} \text{ sono un sistema di generatori per lo spazio } V_s$$

$$I_s \nsubseteq (g_i(u, y_0)) \iff \{g_i(u,y_0)\, n_{ij}\} \text{ non generano}$$

$$\Updownarrow$$

detta M la matrice che ha

Sono i coeff di $\vec{u}^{\vec{h}}$ in $g_i(u, y_0)$ ovvero sono polinomi in $\vec{y}_0$

$\longrightarrow$ come colonne le coordinate di $g_i(u, y_0) u^j$ rispetto alla base canonica di V_S (i monomi omogenei), $rg(M) < \dim V_S$

$\Longleftrightarrow$ tutti i minori $\dim V_S \times \dim V_S$ di M sono zero!

$$M = \begin{pmatrix} P_{11}(\vec{y}_0) & P_{12}(\vec{y}_0) \\ & \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

I minori di M sono polinomi nelle coordinate $\vec{y}_0$.

$\Rightarrow$ T_S è definito da un sistema di equazioni polinomiali in $\vec{y}_0$.