Il teorema di Bertini sulla non-singolarità delle fibre

Analogo algebrico del lemma di Sard

Richiami sul lemma di Sard

$f : X \longrightarrow Y$ applicazione differenziabile tra varietà lisce X e Y. $\dim_{\mathbb{R}} X = n$, $\dim_{\mathbb{R}} Y = m$

Def: diciamo che $x \in X$ è un <u>punto critico</u> per f se

$$d_x f : T_x X \longrightarrow T_{f(x)} Y$$

<u>non è</u> suriettiva (ovvero, se $rg(d_x f) < m$)

Oss: Se $n > m$ (ovvero se $\dim_{\mathbb{R}} Y > \dim_{\mathbb{R}} X$)

allora tutti i punti di X sono critici

Def: $y \in Y$ si dice <u>valore critico</u> di f

se $y = f(x)$ con x punto critico

(esiste x punto critico per f con $x \in f^{-1}(y)$)

Lemma di Sard: l'insieme dei valori critici

di f è un sottoinsieme di Y di misura di

Lebesgue nulla

Informalmente: l'insieme dei valori critici è molto piccolo.

l'insieme dei punti $y \in Y$ t.c. y <u>non è</u> un valore critico ha complementare di misura nulla

ovvero la proprietà di essere un valore regolare è verificata quasi ovunque su Y

(dove per definizione y è un valore regolare se non è un valore critico)

Sia ora y un valore regolare per f

$\Rightarrow \forall x \in f^{-1}(y)$, $d_x f : T_x X \longrightarrow T_y Y$ è suriettivo (ha rango massimo) $\Rightarrow$ localmente attorno a x

possibile, ... Teorema del Dini $f^{-1}(y)$ ha una struttura di varietà liscia di dimensione $n-m$

$\Rightarrow$ Poiché questo è vero $\forall x \in f^{-1}(y)$

$\Rightarrow$ $f^{-1}(y)$ è liscia di dimensione $n-m$.

$f : \underset{\text{dim } n}{X} \longrightarrow \underset{\text{dim } m}{Y}$, f regolare dominante

X, Y irriducibili, X liscia

Allora $\exists\ U \subseteq Y$ aperto non vuoto (e quindi denso) di Y t.c. $\forall y \in Y$

$f^{-1}(y)$ è una sottovarietà liscia di X

di dimensione $\dim f^{-1}(y) = n - m$.

Idea della dimostrazione :

i) Sia $Z \subseteq X$ il luogo dei punti critici per f

ovvero $Z \subseteq X$

$$Z = \{ x \in X : d_x f : \Theta_{X,x} \longrightarrow \Theta_{Y,f(x)} \text{ non è suriettivo} \}$$

Z è chiaramente un chiuso di X

($d_x f$ non suriettivo $\Leftrightarrow$ $rk(d_x f) < m$

($d_x f$ non suriettivo $\iff \mathrm{rg}_{\mathbb{C}}(d_x f) < m$

$\iff$ tutti i minori $m \times m$ di $d_x f$ hanno determinante uguale a zero. questo definisce un chiuso di Zariski in X)

Si ha: $f(Z)$ è contenuto in un chiuso proprio di Y (questo formalizza l'idea intuitiva di $f(Z)$ è "piccolo" dentro Y).

ii) Se $y \in Y$ è un valore regolare per f (ovvero $\forall x \in f^{-1}(y)$, $d_x f$ è suriettivo)

$f^{-1}(y)$ è una sottovarietà liscia di X

di dimensione $n-m$.

Iniziamo col dimostrare ii)

Usiamo il criterio numerico di non singolarità:

una varietà W è nonsingolare $\iff \forall w \in W$

vale $\dim \Theta_{W,w} = \dim W$

Per dimostrare ii) ci basta mostrare che

$\forall x \in f^{-1}(y)$ vale $\dim \Theta_{f^{-1}(y),x} = \dim f^{-1}(y)$

Se $\dim X = n$, $\dim Y = m$

sappiamo che $\forall y \in Y$, $\dim f^{-1}(y) \geq n-m$

$\dim \Theta_{x,x} = \dim X = n$ (X è liscia per ipotesi)

$\dim \Theta_{y,y} \geq \dim Y = m$

$\dim \Theta_{f^{-1}(y),x} = ?$

$\Theta_{f^{-1}(y),x} \hookrightarrow \Theta_{x,x}$

$\dim \Theta_{f^{-1}(y),x} \leq \dim \Theta_{x,x} = n$

Abbiamo bisogno di una stima più raffinata

$f^{-1}(y) \xhookrightarrow{i} X$ $\qquad$ $f \circ i : f^{-1}(y) \longrightarrow Y$

$\qquad$ è costante

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[d] & {} \arrow[d] \\
y \arrow[r, hook] & Y
\end{tikzcd}
\qquad \Rightarrow \quad d_x(f\circ i) = 0
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{H}_{f^{-1}(y),x} \arrow[r, "d_x i"] \arrow[rr, bend right, "d_x(f\circ i)"'] & \mathcal{H}_{X,x} \arrow[r, "d_x f"] & \mathcal{H}_{Y,y}
\end{tikzcd}
$$

$d_x(f\circ i) \equiv 0$ è equivalente a dire che

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{H}^*_{Y,y} \arrow[r, "f^*"] \arrow[rr, bend right, "(f\circ i)^*"'] & \mathcal{H}^*_{X,x} \arrow[r, "i^*"] & \mathcal{H}^*_{f^{-1}(y),x}
\end{tikzcd}
$$

$$
m_{Y,y}/m_{Y,y}^2 \xrightarrow{f^*} m_{X,x}/m_{X,x}^2 \xrightarrow{i^*} m_{x,f^{-1}(y)}/m_{x,f^{-1}(y)}^2
$$

$$\varphi \text{ che si annulla nel punto } y \longrightarrow f^*\varphi \longrightarrow i^* f^* \varphi$$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \|$

restrizione di $f^*\varphi$ alla fibra $f^{-1}(y)$

$$f^*\varphi\Big|_{f^{-1}(y)} \equiv 0$$

$\uparrow$

questo è l'elemento nullo in $\mathcal{O}_{X,f^{-1}(y)}$ e quindi a maggior ragione in $m_{X,f^{-1}(y)}/m_{X,f^{-1}(y)}^2$

Abbiamo ottenuto che

non solo $\Theta_{f^{-1}(y),x} \subseteq \Theta_{X,x}$

ma $\Theta_{f^{-1}(y),x} \subseteq \operatorname{Ker}\left(d_x f : \Theta_{X,x} \longrightarrow \Theta_{Y,y}\right)$

$$\Rightarrow \dim \Theta_{f^{-1}(y),x} \leq \dim \operatorname{Ker}(d_x f)$$

$$= \dim \Theta_{X,x} - \dim \operatorname{Im}(d_x f)$$

$\operatorname{Im}(d_x f) = \Theta_{Y,y} \leftarrow y$ valore regolare

$$= \dim \Theta_{X,x} - \dim \Theta_{Y,y}$$

$$= n - \dim \Theta_{Y,y}$$

$\leq n-m$

$$n-m \leq \dim f^{-1}(y) \leq \dim T_{f^{-1}(y),x} \leq n-m$$

questo dev'essere un uguale e quindi $f^{-1}(y)$ è liscia

questo dev'essere un uguale e quindi $f^{-1}(y)$ ha dimensione $n-m$.

Per dimostrare i) faremo uso del seguente

<u>Lemma.</u> $f : \underset{\dim n}{X} \longrightarrow \underset{\dim m}{Y}$ regolare dominante

X e Y non singolari irriducibili

$\Rightarrow \exists\, U$ aperto non vuoto di X tale che

$\forall x \in U$, x non è un punto critico ($d_x f$ è suriettivo)

<u>dim</u>: Voglio dimostrare che $\exists\ U \subseteq X$ aperto

ne vale t.c.

$$d_x f : \Theta_{X,x} \longrightarrow \Theta_{Y,y} \quad \text{è suriettiva } \forall x \in U$$

equivalentemente

$$(d_x f)^* : \Theta^*_{Y,y} \longrightarrow \Theta^*_{X,x} \quad \text{sia iniettiva } \forall x \in U$$

ovvero

$$f^* : m_{Y,y}/m_{Y,y}^2 \longrightarrow m_{X,x}/m_{X,x}^2 \quad \text{sia iniettiva}$$

ovvero se $u_1 \dots u_m \in \mathcal{O}_{Y,y}$ sono tali che

$du_1 \dots du_m$ sia una base di $\Theta^*_{Y,y}$, allora

$df^*u_1, \dots df^*u_m$ sono linearmente indipendenti in $\Theta^*_{X,x}$

$u_1 \dots u_m$ parametri locali per Y attorno a y

$\Rightarrow v_1 = f^*u_1, \dots v_m = f^*u_m$ si completa a

un sistema di parametri locali $\{v_1 \dots v_n\}$ per X

attorno a x.

L'enunciato che vogliamo dimostrare è locale: possiamo supponiamo X e Y affini.

$$f^*: \mathbb{K}[Y] \hookrightarrow \mathbb{K}[X]$$

$$f^*: \mathbb{K}(Y) \hookrightarrow \mathbb{K}(X)$$

ha grado di trascendenza m su $\mathbb{K}$

ha grado di trascendenza n su $\mathbb{K}$.

$u_1 \dots u_m \in \mathcal{O}_{Y,y} \to u_i$ sono funzioni razionali su Y che in più sono regolari nel punto y.

In particolare sono elementi di $\mathbb{K}(Y)$.

Il fatto che siano parametri locali implica che

$u_1 \ldots u_m$ definisce un'isomorfismo $\widehat{\mathcal{O}}_{Y,y} \cong \mathbb{K}[[t_1 \ldots t_m]]$

$u_i \longleftarrow t_i$

In particolare $u_1 \ldots u_m$ sono algebricamente indipendenti

(oss: se $G(t_1 \ldots t_m)$ è un polinomio tale che

$$G(u_1 \ldots u_m) \equiv 0 \Rightarrow d_y\big(G(u_1 \ldots u_m)\big) \equiv 0$$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial t_1}\right|_{(u_1 \ldots u_m)} \cdot d_y u_1 + \ldots + \left.\frac{\partial G}{\partial t_m}\right|_{(u_1 \ldots u_m)} \cdot d_y u_m \equiv 0$$

$\Rightarrow$ relazione di dipendenza lineare tra i $d_y u_i$ che

non banale

sono una base di $\mathfrak{m}_{y,y}^*$)

$$\mathbb{K}(Y) \xhookrightarrow{f^*} \mathbb{K}(X)$$

$$\{u_1, \dots, u_m\} \longrightarrow \{v_1 \dots v_m\} = \{f^* u_1 \dots f^* u_m\}$$

algebricamente indipendenti

$v_1 \dots v_m$ sono algebricamente indipendenti in $\mathbb{K}(X)$.

$$\Big(\text{se } \exists\, G(t_1 \dots t_m) \text{ t.c. } G(v_1 \dots v_m) \equiv 0$$

$$\Rightarrow G(f^* u_1 \dots f^* u_m) \equiv 0 \Rightarrow f^*(\underbrace{G(u_1 \dots u_m)}_{\in \mathbb{K}(Y)}) = 0 \Big)$$

Possiamo completare $\{v_1 \dots v_m\}$ a $\{v_1 \dots v_n\}$ sistema massimale di elementi algebricamente indipendenti in $\mathbb{K}(X)$

Voglio dimostrare che $d_x v_1 \dots d_x v_n$ generano $\Theta_{X,x}^*$.

Poiché X è una varietà affine $X \subseteq \mathbb{A}^N$

le $x^1 \dots x^N$ sono coordinate in $\mathbb{A}^N$

$\Rightarrow d_x x^1 \dots d_x x^N$ sono generatori per $\Theta_{X,x}^*$

Se dimostro che $d_x v_1 \dots d_x v_n$ genera $d_x x^1 \dots d_x x^N$ ho finito.

$x^1 \in \mathbb{K}(X)$; $v_1 \dots v_n$ sono un sistema massimale di elementi algebricamente indipendenti

$\Rightarrow x^1$ è algebricamente dipendente da $v_1 \dots v_n$.

$\rightarrow \exists\ F(t^0, t^1, \dots t^n)$ t.c. $F(x^1; v_2 \dots v_n) \equiv 0$

F irriducibile.

$$F = a_0(t^1 \dots t^n)(t^0)^k + a_1(t^1 \dots t^n)(t^0)^{k-1} + \dots + a_k(t^1 \dots t^n)$$

$$a_0(v_1 \dots v_n)(x^1)^k + a_1(v_1 \dots v_n)(x^1)^{k-1} + \dots + a_k(v_1 \dots v_n) \equiv 0$$

$$d_x F(x^1; v_2 \dots v_n) \equiv 0$$

$$\|$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial t^0}\right|_{(x^1, v \dots v)} \cdot d_x x^1 + \left.\frac{\partial F}{\partial t^1}\right| d_x v_1 + \dots + \left.\frac{\partial F}{\partial t^n}\right| d_x v_n$$

$(x, v_1 \dots v_m)$ $\qquad$ $(x \dots v_m)$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial F}{\partial t^1} = \dfrac{\partial a_0}{\partial t^1} (f^0)^k + \dfrac{\partial a_1}{\partial t^1} (f^0)^{k-1} + \dots + \dfrac{\partial a_n}{\partial t^1} \\
\vdots \\
\dfrac{\partial F}{\partial t^n} = \dfrac{\partial a_0}{\partial t^n} (f^0)^k + \dots + \dfrac{\partial a_n}{\partial t^n}
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial F}{\partial t^1} \cdot d_x v_1 = \dfrac{\partial a_0}{\partial t^1} (f^0)^k \cdot d_x v_1 + \dots \dfrac{\partial a_n}{\partial t^1} d_x v_1 \\
\qquad = \left(\dfrac{\partial a_0}{\partial t^1} d_x v_1 \right) \cdot (f^0)^k + \left(\dfrac{\partial a_1}{\partial t^1} d_x v_1 \right) (f^0)^{k-1} + \dots
\end{cases}
$$

$$\frac{\partial F}{\partial t^n} \cdot d_x v_n = \left(\frac{\partial a_0}{\partial t^n} d_x v_n \right) \cdot (t^0)^k + \cdots \qquad \frac{\partial a_k}{\partial t^n} d_x v_n$$

$$\frac{\partial F}{\partial t^1} d_x v_1 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial t^n} d_x v_n = \left(\frac{\partial a_0}{\partial t^1} d_x v_1 + \cdots \frac{\partial a_0}{\partial t^n} d_x v_n \right) (t^0)^k$$

$$+ \cdots \left(\frac{\partial a_k}{\partial t^1} d_x v_1 + \cdots \frac{\partial a_k}{\partial t^n} d_x v_n \right).$$

$$= d_x a_0 \cdot (t^0)^k + \cdots \quad d_x a_k$$

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial F}{\partial t^0} \right|_{(x^1, v_2 \ldots v_n)} \cdot d_x x^1 + \left((x^1)^k d_x a_0 + (x^1)^{k-1} d_x a_1 + \cdots d_x a_k \right) \equiv 0$$

$$\partial_i(t^0 \ldots t^n) = \partial_i(t^1 \ldots t^n)$$

$$\partial_i \Big|_{(x^1, v_2 \ldots v_m)} = \partial_i(v_1 \ldots v_m) \Longrightarrow d_x \partial_i(v_1 \ldots v_m)$$

sono combinazioni lineari di

$d_x v_2 \ldots d_x v_n$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t^0} \Big|_{(x^1, v_2 \ldots v_n)} \right) \cdot d_x x^1$$ è una combinazione lineare di $d_x v_2 \ldots d_x v_n$

F era il polinomio che esprime la dipendenza algebrica di x^1 rispetto a $v_2 \ldots v_n$

$$\downarrow$$

$$t^0$$

$\Rightarrow$ $\dfrac{\partial F}{\partial t^0}$ non è identicamente nullo! (char $k = 0$)

$\Rightarrow$ c'è tutto un aperto non vuoto U_1 di X dove $\left.\dfrac{\partial F}{\partial t^0}\right|_{(x^1, x_2 \dots x_n)} \neq 0$.

Ripeto il ragionamento per $x^2, \dots x^N$

$\Rightarrow$ $U = \bigcap_{i=1}^{N} U_i \leftarrow$ è intersezione finita di aperti non vuoti in X che è irriducibile $\Rightarrow$ U è aperto non vuoto.

$\Rightarrow$ rivestimento, $\forall x \in U$, $d_x f$ è suriettiva

(abbiamo dimostrato che $\forall x \in X$, $d_x v_1 \dots d_x v_m$

generano $H^*_{x,x}$ $\Rightarrow$ sono una base $\Rightarrow$ sono lin. indip.

ha dim m

$\Rightarrow$ $\{d_x v_1 \dots d_x v_m\}$ sono un sistema di vettori

indipendenti)

Ora possiamo dimostrare il teorema di

Bertini.

$f : \underset{n \text{ dim}}{X} \longrightarrow \underset{m \text{ dim}}{Y}$ X, Y irriducibili, X liscia, f regolare e dominante.

Voglio dimostrare che esiste $U \subseteq Y$ aperto denso t.c. $f^{-1}(y)$ è liscia di dim $n-m$ $\forall y \in U$.

Non è restrittivo supporre che anche Y sia liscia (basta restringersi a $f : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{Y}$ dove $\tilde{Y} = Y \setminus \operatorname{Sing}(Y)$, $\tilde{X} = f^{-1}(\tilde{Y})$).

Allo stesso modo possiamo anche supporre che tutte le fibre di f abbiano la stessa dimensione

e questa sia proprio $n-m$. (questa è la dimensione generica delle fibre).

<u>dim</u>: Sia Z il luogo critico per f

$$Z \subseteq X \quad , \quad Z = \{x \in X : d_x f \text{ non è suriettiva}\}$$

$$Z = \bigcup Z_i \qquad Z_i \text{ irriducibili}$$

$$\tilde{Z}_i = Z_i \setminus \mathrm{Sing}(Z_i) \qquad \tilde{Z}_i \text{ è liscia irriducibile}$$

$$f : \tilde{Z}_i \longrightarrow Y$$

Voglio dimostrare che $f(\tilde{Z}_i)$ è contenuta

Voglio dimostrare che ogni $f(Z_i)$ è contenuto

in un chiuso proprio V_i di Y

Questo implica che $f(Z_i) \subseteq V_i$

e quindi $f(Z) \subseteq \bigcup V_i = V$ ← è ancora un chiuso proprio (unione finita di chiusi propri in Y irriducibile)

Se $\overline{f(\tilde{Z}_i)} = Y$ allora

$f: \tilde{Z}_i \longrightarrow Y$ è dominante, regolare irriducibile liscia

liscia irriducibile

$\Rightarrow$ siamo nelle ipotesi del lemma!

$\exists\ W_i \subseteq \tilde{Z}_i$ aperto denso t.c.

$\forall x \in W_i, \quad d_x f : \Theta_{\tilde{Z}_i, x} \longrightarrow \Theta_{Y, f(x)}$

è suriettivo, $\forall x \in W_i$

$\tilde{Z}_i \subseteq X$

$\Theta_{\tilde{Z}_i, x} \hookrightarrow \Theta_{X, x}$

$d_x f$ $\quad$ $d_x f$ $\leftarrow$ a maggior ragione è suriettivo!

suriettivo

H

$Y, f(x)$

$\Downarrow$

x è un punto regolare per f.

Ma $x \in W_i \subseteq \tilde{Z}_i \subseteq Z \Rightarrow x$ è un punto critico per f $\Big\}$ Assurdo!

$\Rightarrow f(\tilde{Z}_i) \subsetneq Y$

$\Rightarrow \quad f(\tilde{Z}_i) = V_i$ chiuso proprio di Y.

Sia U il complementare di V in Y; U è un aperto denso di Y

$\Rightarrow \forall y \in U, \quad y \notin f(Z)$

$\Rightarrow \forall x \in f^{-1}(y), \quad x \notin Z$

$\Rightarrow \forall x \in f^{-1}(y) \Rightarrow x$ è un punto regolare per f

$\Rightarrow \forall x \in f^{-1}(y), \quad d_x f : \Theta_{X,x} \longrightarrow \Theta_{Y,y}$ è suriettivo.