$p_2 : \mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m \longrightarrow \mathbb{A}^m$ è chiusa (nella top di Zariski)

<u>Corollario</u>: $p_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ con X proiettiva

Y quasi proiettiva è chiusa.

Primo passo: X proiettiva

$$p_2 : X \times \mathbb{A}^m \longrightarrow \mathbb{A}^m \quad \text{è chiusa}$$

$X \subseteq \mathbb{P}^n$ $\quad X$ è chiuso in $\mathbb{P}^n$

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, hook, "\text{chiuso}"'] & X \times \mathbb{A}^m \arrow[r, hook, "\text{chiuso}"] \arrow[d, "p_2"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m \arrow[d, "p_2"] \\
& \mathbb{A}^m \arrow[r] & \mathbb{A}^m
\end{tikzcd}$$

Z è chiuso in $\mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m \Rightarrow p_2(Z)$ è chiuso in $\mathbb{A}^m$

Secondo passo: $X \times Y \xrightarrow{p_2} Y$ è chiusa

proiett affine

$$Y \xhookrightarrow{\text{chiuso}} \mathbb{A}^m$$

$$\begin{tikzcd}
Z \subseteq X \times Y \arrow[r, hook, "\text{chiuso}"] \arrow[d, "p_2"] & X \times \mathbb{A}^m \arrow[d, "p_2"] \\
Y \arrow[r, hook] & \mathbb{A}^m
\end{tikzcd}$$

chiusa per il passo uno.

Ultimo passo X proiettiva e Y quasi-proiettiva

$Y = \bigcup Y_i \qquad Y_i$ affini

$X \times Y_i \xrightarrow{p_2} Y_i$ chiuse

Z chiuso di $X \times Y \Rightarrow Z_i := Z \cap X \times Y_i$ è chiuso in $X \times Y_i$

$\Rightarrow p_2(Z_i)$ è chiuso in Y_i

$\{Y_i\}$ è un ricoprimento aperto di Y

un sottoinsieme W di Y è chiuso $\Longleftrightarrow$ $W \cap Y_i$ è chiuso in Y_i $\forall i$

Quindi $p_2(Z)$ è chiuso in $Y \Longleftrightarrow p_2(Z) \cap Y_i$ è chiuso in Y_i $\forall i$

$p \in p_2(Z) \cap Y_i \Longleftrightarrow p = p_2(q)$ con $q \in Z$ e $p_2(q) \in Y_i$

$q = (q_x, q_y)$ con $q_y \in Y_i \rightarrow (q_x, q_y) \in X \times Y_i$

$\Rightarrow q \in Z \cap X \times Y_i = Z_i$

$\Rightarrow p_2(Z) \cap Y_i = p_2(Z_i)$, che è chiuso in Y_i

---

Conseguenza importante: $f : X \longrightarrow Y$

f regolare, X proiett, Y quasi-proiett $\Rightarrow$

f è chiusa

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_f \arrow[r, hook, "\text{chiuso}"] & X \times Y \arrow[d, "p_2"] & \text{chiusa (appena dimostrato} \\
X \arrow[u, "\wr"] \arrow[r, "f"'] & Y &
\end{tikzcd}$$

Oss

$$\begin{tikzcd}
 & X \times Y \arrow[r, hook] \arrow[d, "p_2"] & \mathbb{P}^n \times Y \arrow[d, "p_2"] & \text{chiusa} \\
\arrow[ur, hook, "\text{chiuso}"] & & &
\end{tikzcd}$$

$$X \qquad\qquad Y \xrightarrow{\ id\ } Y$$

Def: $X \xrightarrow{f} Y$ regolare si dice *propria*

quasi pr.

se f ha una fattorizzazione

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{P}^n \times Y \arrow[d, "p_2"] \\ X \arrow[ur, hook, "\text{chiusa}"] \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

Oss: se X è proiettiva $\Rightarrow$ $\forall f : X \to Y$ regolare è propria

Prop: $f : X \to Y$ propria $\Rightarrow$ f è chiusa.

Esempio di f propria su dominio non proiettivo

X proiett, $f: X \to Y$ è propria

U aperto di Y $\qquad f|_{f^{-1}(U)}: f^{-1}(U) \to U$

è ancora propria

$$\Gamma_{f|_{f^{-1}(U)}} = \Gamma_f \cap f^{-1}(U) \times U = \underbrace{\Gamma_f \cap \mathbb{P}^n \times U}_{\text{chiuso in } \mathbb{P}^n \times U}$$

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_{f|_{f^{-1}(U)}} \arrow[r, hook, "\text{chiuso}"] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & \mathbb{P}^n \times U \arrow[d, "p_2"] \\
f^{-1}(U) \arrow[r, "f"] & U
\end{tikzcd}$$

Corollari importanti

X proiettiva irriducibile, $f \in \mathbb{K}[X] \Rightarrow f$ è costante

(X varietà olomorfa compatta e connessa, $f \in \mathrm{Hol}(X)$ $\Rightarrow f$ costante (principio del massimo))

dim: $f \in \mathbb{K}[X]$, $f : X \longrightarrow \mathbb{A}^1$

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{P}^1 \\ X \arrow[ur, "\hat{f}"] \arrow[r, "f"] & \mathbb{A}^1 \arrow[u, hook, "i"'] \end{tikzcd} \qquad \hat{f} = i \circ f$$

X proiettiva $\Rightarrow f, \hat{f}$ sono chiuse

$\Rightarrow$ $f(X)$ è chiuso in $\mathbb{A}^1$ $\longrightarrow$ $f(X) = \mathbb{A}^1$ oppure $f(X) = \{P_1 \dots P_n\}$

$\Rightarrow$ $\tilde{f}(X)$ è chiuso in $\mathbb{P}^1$

$$\begin{gathered} \tilde{f}(X) \\ \| \\ f(X) \end{gathered}$$

$\mathbb{A}^1$ non è chiuso in $\mathbb{P}^1$ $\left(\overline{\mathbb{A}^1} \text{ in } \mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^1 \right)$

$\Rightarrow$ $f(X) \neq \mathbb{A}^1 \Rightarrow f(X) = \{P_1, \dots P_n\}$

$$X = f^{-1}(P_1) \amalg f^{-1}(P_2) \amalg \dots \amalg f^{-1}(P_n)$$ chiusi propri

ma X è irriducibile $\Rightarrow n = 1 \Rightarrow f(X) = \{P\}$.

Corollario del corollario

$f: X \longrightarrow Y$ ... f costante ... f è costante

$f: X \to Y$ $\qquad$ f regolare $\Rightarrow$ f è costante

proiettiva $\qquad$ affine

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{A}^m \\
X \arrow[ur, "\tilde f"] \arrow[r, "f"] & Y \arrow[u, hook, "i"']
\end{tikzcd}$$

$\tilde f = (\tilde f^1, \dots, \tilde f^m)$

$\tilde f^i : X \to \mathbb{A}^1 \Rightarrow \tilde f^i$ è costante

$\exists \; p \in \mathbb{A}^m : \tilde f^i(x) = p^i \quad \forall \; x \in X$

$\Rightarrow \tilde f(x) = p \quad \forall \; x \in X.$

($p \in Y$ in quanto $\tilde f(x) \subseteq Y \subseteq \mathbb{A}^m$)

Proiezioni dai sottospazi di $\mathbb{P}^n$

$V \xrightarrow{f} W$ lineare suriettiva

$$0 \to \ker f \hookrightarrow V \xrightarrow{f} W \to 0$$

$$\mathbb{P}(V) \overset{f}{\dashrightarrow} \mathbb{P}(V)$$

Se $\ker f \neq \{0\}$

$v \in \ker f$ $\quad [v] \in \mathbb{P}(V)$

$v \neq 0$

$f(v) = 0 \to f(v)$ non definisce un punto $[f(v)]$ in $\mathbb{P}(W)$

Se $v \notin \ker(f) \Rightarrow f(v) \neq 0 \Rightarrow [f(v)] \in \mathbb{P}(W)$

$E = \mathbb{P}(\ker(f))$ $\quad (E = \emptyset$ se $\ker(f) = \{0\})$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V) \setminus E &\xrightarrow{f} \mathbb{P}(W) \\ [v] &\longmapsto [f(v)] \end{aligned}$$

è ben definita : $[v_1] = [v] \Rightarrow v_1 = \lambda v$

$$f(v_1) = \lambda f(v) \Rightarrow [f(v_1)] = [f(v)] .$$

Oss : E è un chiuso di $\mathbb{P}(V)$ (descritto da un sistema di equazioni (lineari))

$\pi_E : \mathbb{P}(V) \dashrightarrow \mathbb{P}(W)$ è una mappa razionale

<u>Oss</u>: $\mathrm{Ker}(f) \subseteq V$. $\exists\, U \subseteq V$ che complementa $\mathrm{Ker}(f)$. Ovvero $V = \mathrm{Ker}(f) \oplus U$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & W \\ {} \arrow[ur, "\sim"] & \end{tikzcd}$$

$$v = \underset{\substack{\rotatebox{90}{$\in$} \\ U}}{u} + \underset{\substack{\rotatebox{90}{$\in$} \\ \mathrm{Ker}\, f}}{w} \xmapsto{\pi} u$$

$U \quad \mathbb{A}_U$

In coordinate opportune $v = (x^0, \dots, x^n)$

$$= (x^0, \dots x^k, 0 \dots 0) + (0, \dots 0, x^{k+1} \dots x^n)$$

$$\mapsto (x^0 \dots x^k, 0 \dots 0) \longmapsto (x^0 \dots x^k)$$

$$\pi_E : [x^0 : \dots x^n] \longrightarrow [x^0 : \dots x^k]$$

è definita sul luogo $(x^0 : \dots x^k) \neq (0, \dots 0)$

(le equazioni di $\ker f$ in questo sistema di coordinate sono $\begin{cases} x^0 = 0 \\ \dots \\ x^k = 0 \end{cases}$)

Oss: $\mathbb{A}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n$

$$\begin{tikzcd}
(x^1 \dots x^n) \arrow[r, mapsto] \arrow[d] & {[1 : x^1 \dots x^n]} \arrow[d, "\pi"] \\
(x^1 \dots x^k) \arrow[r, mapsto] & {[1 : x^1 : \dots x^k]}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccc} (x \dots x) & \longmapsto & [\dots] \\ \cap & & \cap \\ \mathbb{A}^n & \hookrightarrow & \mathbb{P}^k \end{array}$$

$\pi_E : [v] \longmapsto [u]$ $\qquad v \notin \operatorname{Ker} f$

$$v = \underset{\substack{\cap \\ U}}{u} + \underset{\cap \operatorname{Ker} f}{w}$$

Sia $Z_v = \operatorname{span}(v, \operatorname{Ker} f)$ $\qquad Z_f \supsetneq \operatorname{Ker} f$

$$\dim Z_f = \dim \operatorname{Ker} f + 1$$

$$\begin{aligned} \dim (Z_f \cap U) &= \dim Z_f + \dim U - \dim V \\ &= \cancel{\dim \operatorname{Ker} f} + 1 + \cancel{\dim U} - \cancel{\dim V} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ In $\mathbb{P}(V)$ $\quad Z_f \cap U$ è un solo punto!

$$v = u + w \Rightarrow \underset{\underset{\displaystyle U}{\cap}}{u} = v - \underset{\underset{\displaystyle \ker f}{\cap}}{w} \in \mathrm{Span}(v, \ker f) = Z_v$$

$u \in Z_f \cap U$

Se $u = 0 \Rightarrow v = w \in \ker f$ contro l'ipotesi $\Rightarrow u \neq 0$

$\Rightarrow$ il punto di $\mathbb{P}(V)$ corrispondente a $Z_f \cap U$ è proprio $[u]$.

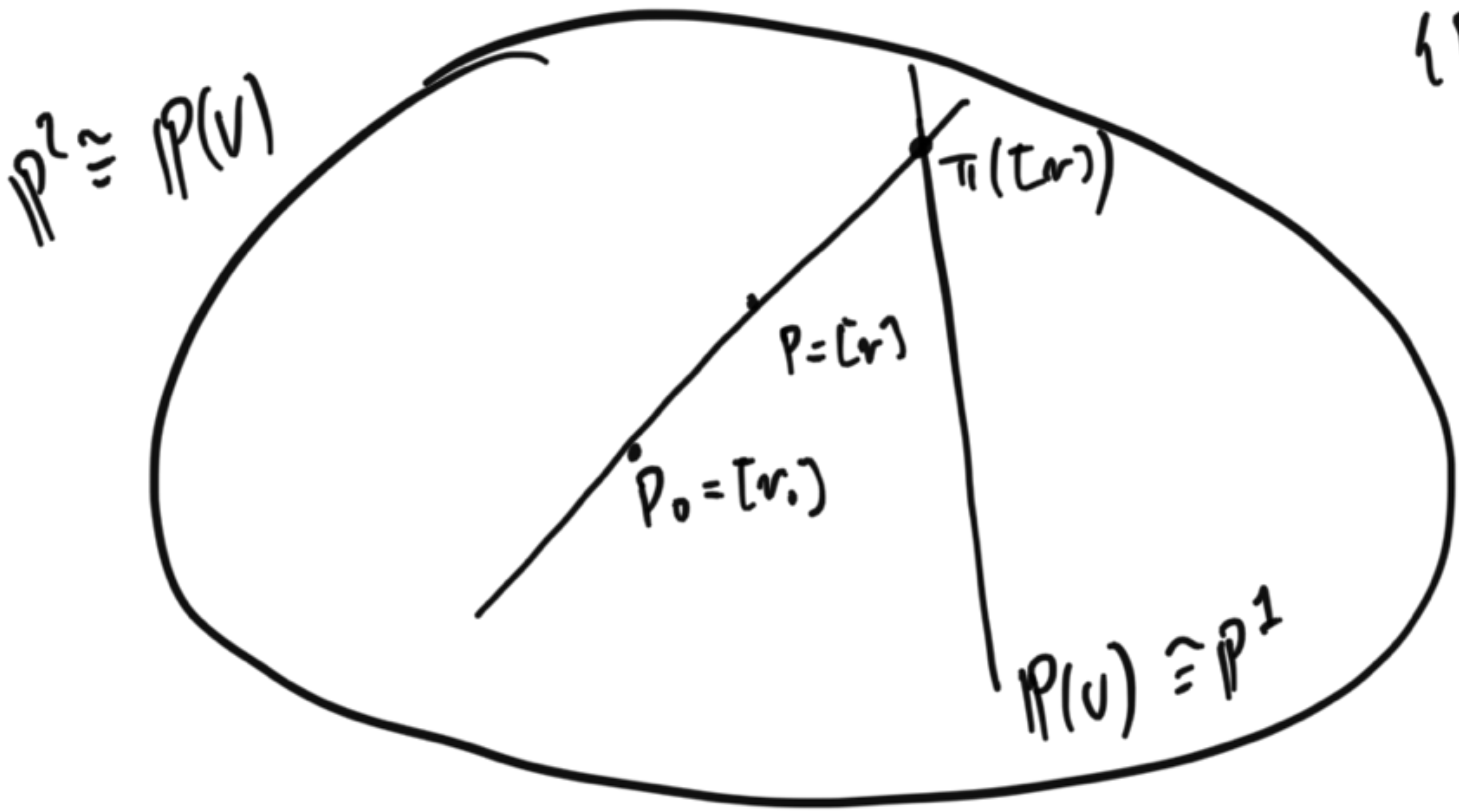
Es: $\dim \ker f = 1$ $\qquad E = \{P_0\}$

$\dim V = 3$ $\qquad \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^2$

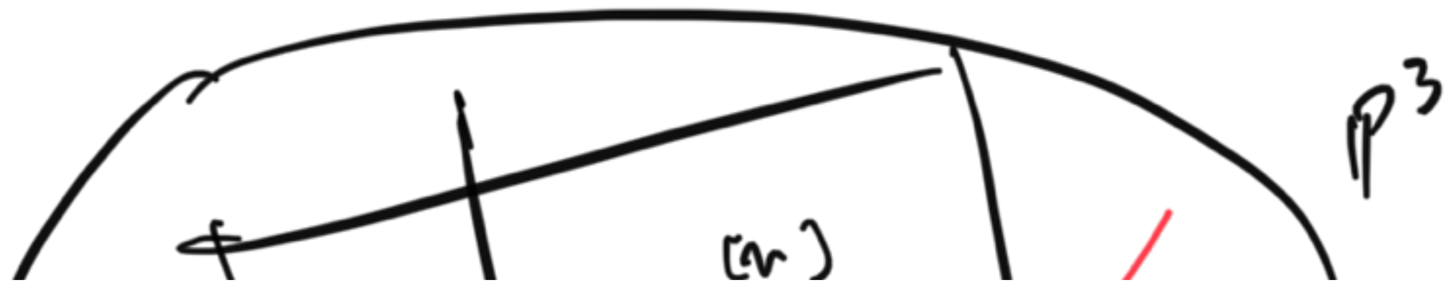
$U \oplus \ker f = V \rightarrow \dim U = 2$

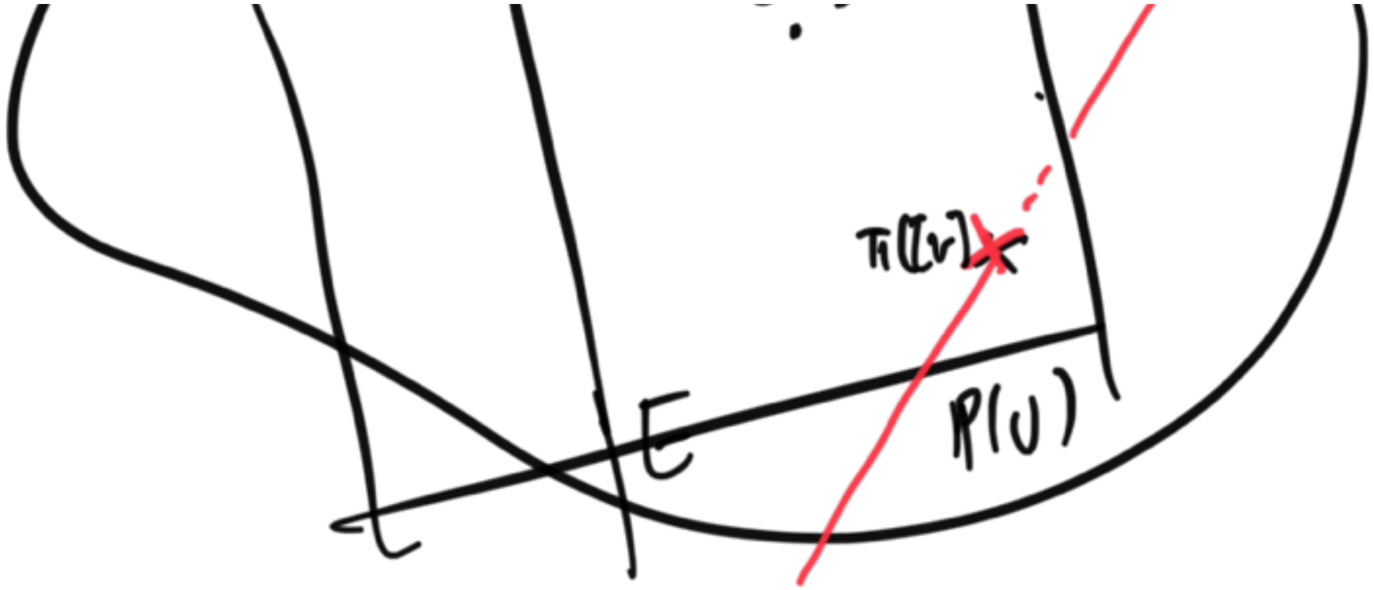
$U \cap \mathrm{Ker} f = \{0\}$

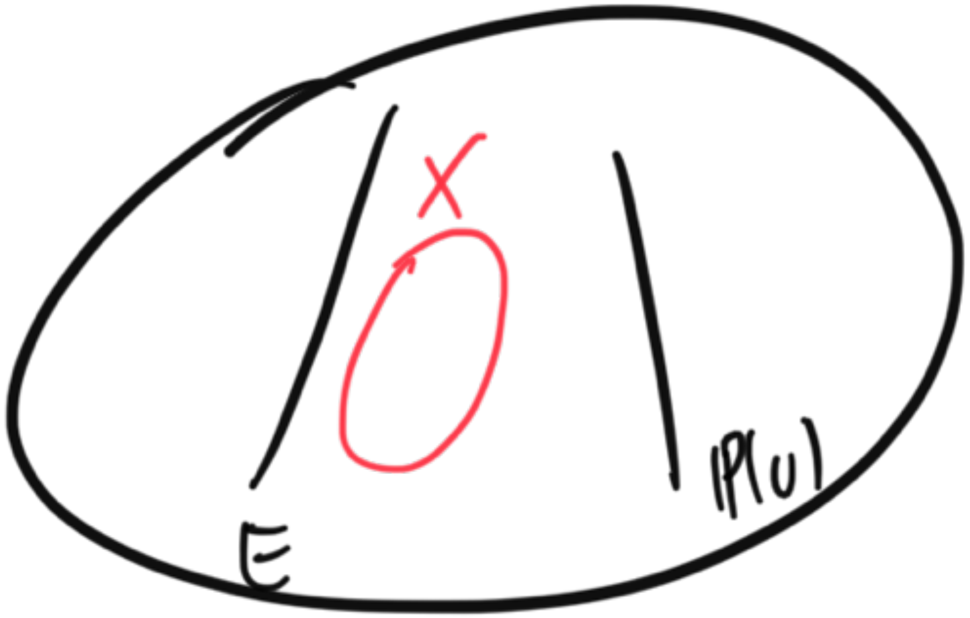
$\to \quad \mathbb{P}(U) = \mathbb{P}^1 \quad ; \quad \mathbb{P}(U) \cap \underset{\substack{\| \\ \{P_0\}}}{\mathbb{P}(\mathrm{Ker} f)} = \emptyset \implies P_0 \notin \mathbb{P}(U)$



Es $\quad \dim \mathrm{Ker} f = 2 \qquad \dim V = 4 \qquad \dim U = 2$







$E \subseteq \mathbb{P}^n$

↑

sottospazio lineare

$X \subseteq \mathbb{P}^n$ varietà proiettiva con $X \cap E = \emptyset$

$\pi_E\big|_X : X \longrightarrow \mathbb{P}(U)$ è regolare

$$\pi_E|_X : X \longrightarrow \pi_E(X)$$

è chiusa in $\mathbb{P}(U)$

$\Rightarrow \pi_E(X)$ è una varietà proiettiva!

Inoltre: $\pi_E|_X : X \longrightarrow \pi_E(X)$

è una <u>mappa finita</u>

Oss: se $X \cap E \neq \emptyset$

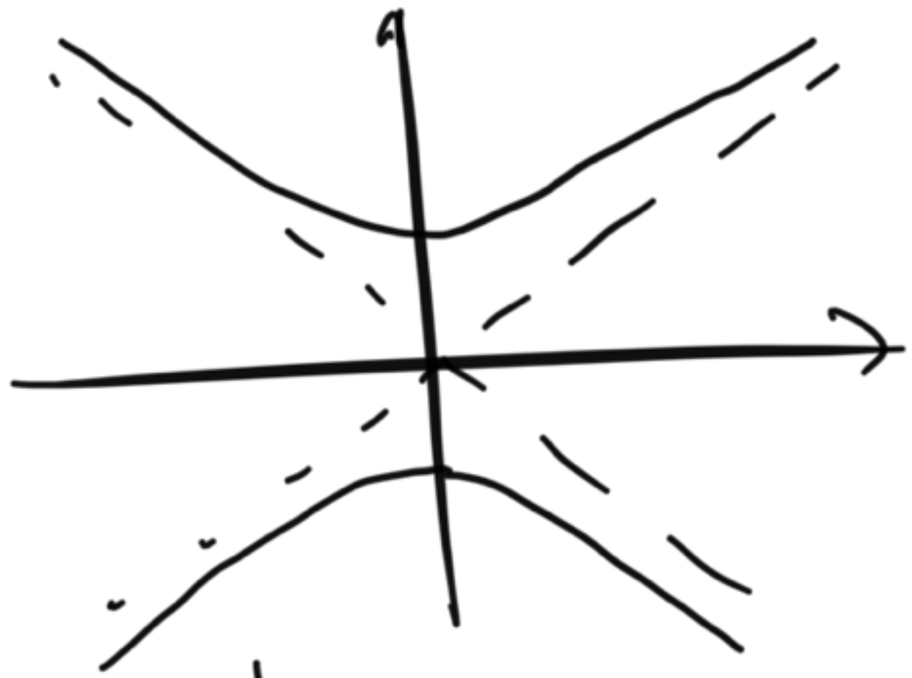
$\pi_E|_X : X \dashrightarrow \mathbb{P}(U)$ è una mappa razionale, regolare su $X \setminus (X \cap E)$

Mappe finite tra varietà affini

Esempi: in $\mathbb{A}^2$

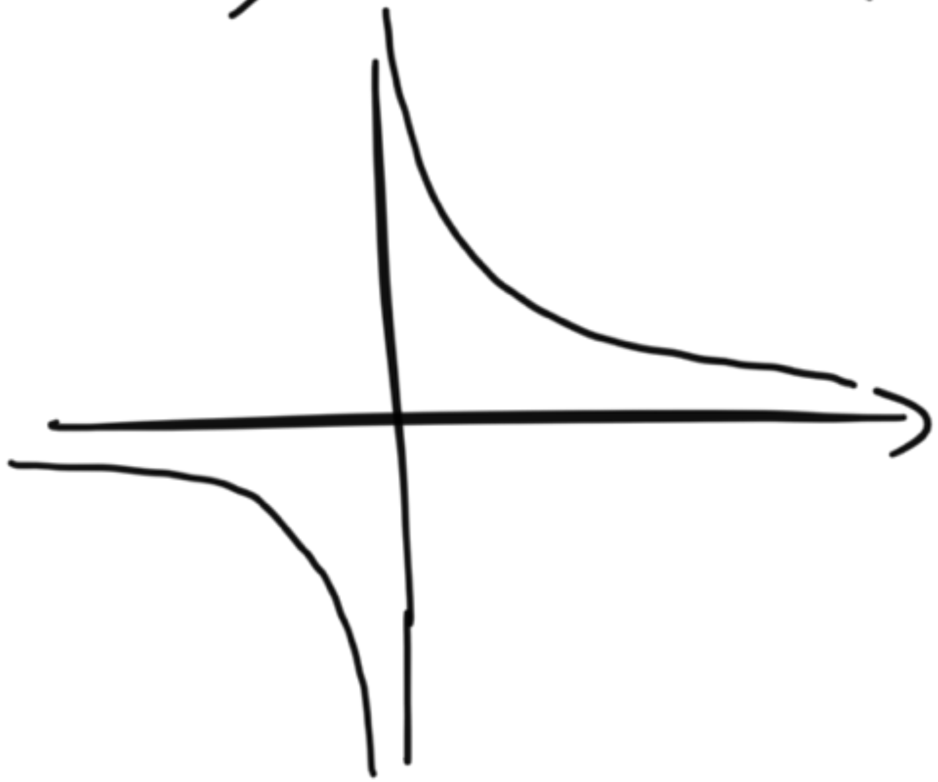
i) $y^2 - x^2 - 1 = 0$

$$\begin{array}{c} y^2 - x^2 - 1 = 0 \\ \shortparallel \\ Z_1 \end{array}$$



ii) $xy - 1 = 0$

$$\begin{array}{c} xy - 1 = 0 \\ \shortparallel \\ Z_2 \end{array}$$



$$\begin{aligned} \pi_2 : \mathbb{A}^2 &\longrightarrow \mathbb{A}^1 \\ (x,y) &\longmapsto x \end{aligned}$$

$\pi_2 : Z_i \longrightarrow \mathbb{A}^1$ è regolare

Sia $x_0 \in \mathbb{A}^1$ $\left(\pi_2\big|_{Z_1}\right)^{-1}(x_0) = ?$ $(x,y) \in Z_1 : \quad x = x_0$

$\to y \in \mathbb{K} : \quad y^2 - x_0^2 - 1 = 0 \Rightarrow y^2 = 1 + x_0^2$

contando con molteplicità ci sono esattamente due valori di y per ogni scelta di x_0

$\pi_2 : Z_1 \longrightarrow \mathbb{A}^1$ è suriettiva e la controimmagine di ogni punto consiste sempre di due punti (contando le molteplicità)

Vediamo ora $\left(\pi_2\big|_{Z_2}\right)^{-1}(x_0)$. Stavolta devo risolvere

$x_0 y = 1$. Questa ha esattamente una soluzione se $x_0 \neq 0$. Ma <u>non ha soluzione</u> se $x_0 = 0$

($\left|\left(\pi_2|_{Z_2}\right)^{-1}(x_0)\right|$ è sempre finita ma stavolta non è costante; inoltre $\pi_2 : Z_2 \to A^1$ <u>non è suriettiva</u>)

Def: $A \subseteq B$ A sottoanello di un anello commutativo B

$b \in B$ si dice <u>intero</u> su A

se b soddisfa un'equazione del tipo

$$t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad \text{con } a_i \in A$$

il direttore è 1!

coeff. direttivo a 1.

Oss: $\bar{A} = \{ b \in B : b$ è intero su $A \}$ è un sottoanello di B, che prende il nome di chiusura integrale (intera?) di A in B.

Def: $A \subseteq B$. B si dice intero su A se $\bar{A} = B$ ($\forall b \in B$, b è intero su A)

oss: $A \subseteq \bar{A}$

$\forall a \in A$

a è radice di $t - a = 0$

Es: $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

$\bar{\mathbb{Z}}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Z}$

$b \in \bar{\mathbb{Z}}_{\mathbb{Q}}$ significa

$b \in \mathbb{Q}$; b soddisfa un'equazione del

tipo $t^n + a_1 t^{n-1} + \dots a_n = 0$ $a_i \in \mathbb{Z}$ p.k

$b \in \mathbb{Q} \Rightarrow b = \frac{\alpha}{\beta}$ ridotta $\Rightarrow \frac{\alpha^n}{\beta^n} + \dots = 0 \Rightarrow \alpha^n + \overbrace{a_1 \alpha^{n-1}\beta + \dots a_n \beta^n}^{p.k} = 0$

$\Rightarrow \beta \mid \alpha^n \Rightarrow \beta = \pm 1 \Rightarrow b \in \mathbb{Z}$

Si considera $\mathbb{Z} \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ ← chiusura algebrica di $\mathbb{Q}$

$\overline{\mathbb{Z}} := \overline{\mathbb{Z}}_{\overline{\mathbb{Q}}}$ è l'anello degli interi algebrici

$(\sqrt{2} \in \overline{\mathbb{Z}})$

<u>Oss</u>: Se B è finitamente generato come algebra su

A ($\exists\, b_1 \dots b_n \in B$ t.c.

$\forall\, b \in B$ $b = p(b_1 \dots b_n)$ con

$p(t^1 \dots t^n) \in A[t^1 \dots t^n]$)

Allora B è intero su $A \iff$

B è finitamente generato come A-modulo

$\left(\exists \, (b_1 \dots b_n) \text{ t.c. } \forall b \in B \quad b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots a_n b_n \right)$

Sia ora $f : X \longrightarrow Y$ una mappa regolare di varietà affini

$$f^* : \mathbb{K}[Y] \longrightarrow \mathbb{K}[X]$$

Supponiamo f sia dominante ($f(X)$ è denso in Y)

$\iff f^* : \mathbb{K}[Y] \hookrightarrow \mathbb{K}[X]$ è iniettiva.

$(f^\downarrow(g) = 0 \Rightarrow g \circ f \equiv 0$ su $X \Rightarrow g|_{f(X)} \equiv 0$

$\Rightarrow g|_Y \equiv 0 \Rightarrow g = 0$

Viceversa se $\overline{f(X)} \neq Y$ $\exists$ $p \in Y$ $p \notin \overline{f(X)}$

$\exists$ Z chiuso di Y con $p \notin Z$, $f(X) \subseteq Z$

Sia g una delle equazioni che definiscono Z

con $g(p) \neq 0$ (esiste perché $p \notin Z$)

$f^\downarrow(g)(x) = g(f(x)) = 0 \;\; \forall x \in X \Rightarrow f^\downarrow(g) = 0$

$\Big(f(x) \in f(X) \subseteq Z$ $\quad g$ è una delle equazioni che definiscono $Z \Rightarrow g|_Z \equiv 0 \Big)$

$\Rightarrow g \in \ker f^*$ e $g \not\equiv 0$ in quanto $g(p) \neq 0$.)

---

f^* iniettiva $\Rightarrow$ f^* identifica $\mathbb{K}[Y]$ con un sottoanello (che continuiamo a indicare $\mathbb{K}[Y]$) di $\mathbb{K}[X]$

$$\mathbb{K}[Y] \underset{f^*}{\subseteq} \mathbb{K}[X]$$

<u>Def</u>: Se f è dominante diciamo che f è finita se $\mathbb{K}[X]$ è intero su $\mathbb{K}[Y]$

<u>Oss</u>: $\mathbb{K}[X]$ è finitamente generato come algebra su $\mathbb{K}$ $\quad \mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[x^1 \dots x^n] / I_X$

$\Rightarrow \mathbb{K}[X]$ è finitamente generato su $\mathbb{K}[Y]$

$\Rightarrow f$ è finita $\Leftrightarrow \mathbb{K}[X]$ è un $\mathbb{K}[Y]$-modulo di rango finito

---

i) $f : X \to Y$ finita

$\to \forall\, y_0 \in Y$, $f^{-1}(y_0)$ è finita

dim: X affine $X \subseteq \mathbb{A}^n$

siano $x^1 \dots x^n$ le coordinate di $\mathbb{A}^n$

$x^i|_X \in \mathbb{K}[X]$

ii) ... un'equazione del tipo

$x^i|_X$ soddisfa

$$t^n + a_1(\vec{y})t^{n-1} + \dots + a_n(\vec{y}) = 0$$

$\forall p \in X$

$$(x^i(p))^n + a_1(\vec{y}(p))(x^i(p))^{n-1} + \dots a_n(\vec{y}(p)) = 0$$

sto pensando
a $y^1 \dots y^k$ come funzioni su X
Questo avviene mediante f^*

In realtà $\vec{y}(p)$ è un abuso di
notazione per $(f^*\vec{y})(p)$

La vera equazione soddisfatta da $x^i(p)$ è

$$(x^i(p))^n + a_1(\vec{y}(f(p)))(x^i(p))^{n-1} + \dots + a_n(\vec{y}(f(p))) = 0$$

Se $p \in f^{-1}(y_0) \Rightarrow f(p) = \vec{y}_0 \qquad \vec{y}(f(p)) = \vec{y}_0$

$\Rightarrow$ Se $p \in f^{-1}(y_0)$

$$(x^i(p))^n + a_1(y_0)\, x^i(p)^{n-1} + \dots + a_n(y_0) = 0$$

$\Rightarrow$ ci sono al più possibilità distinte per $x^i(p)$

$\Rightarrow$ ci sono un numero finito di possibilità per $p \in f^{-1}(y_0)$

$f : X \to Y$ finita $\Rightarrow$ f è suriettiva!

$\exists$ ... lla ... del lemma di Nakayama

È un corollario del

Notazioni: I ideale di A

$$S_I = \{1 + i \,,\, i \in I\}$$

$S_I \subseteq A$ è un sistema moltiplicativo

cioè $x, y \in S_I \Rightarrow x \cdot y \in S_I$

$$(1+i)(1+j) = 1 + \underbrace{i + j + ij}_{\in I}$$

Lemma (Nakayama)

Sia M un A-modulo finitamente generato e sia I un ideale di A. Se $I \cdot M = M$ allora esiste $x \in S_I$ t.c. $xM = 0$

esiste $x \in 1+I$ t.c. $x \cdot M = 0$

dim: M finitamente generato $\Rightarrow \exists\, m_1 \dots m_n \in M$ t.c. ogni elemento di M è combinaz. lineare a coeff in A degli m_i.

$IM = M$ significa $\forall m \in M$

$$m = i_1\mu_1 + i_2\mu_2 + \dots i_\ell\mu_\ell \qquad i_j \in I,\ \mu_j \in M$$

$\mu_j \in M \Rightarrow \mu_j$ è combinazione di $\{m_1 \dots m_n\}$ a coeff in A.

$$\mu_1 = \lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 + \dots \lambda_n m_n$$

$$\Rightarrow i_1\mu_1 = (i_1\lambda_1)m_1 + (i_2\lambda_2)m_2 + \dots (i_n\lambda_n)m_n$$

$$\overset{\uparrow}{I} \qquad\qquad \overset{\uparrow}{I}$$

$$\Rightarrow \forall m \in M \Rightarrow m = \alpha^1 m_1 + \dots \alpha^n m_n \qquad \alpha^i \in I$$

$$\forall i \qquad m_i = \alpha_i^j m_j \qquad \alpha_i^j \in I$$

$$P = \left(\alpha_i^j\right)$$

$$P\begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{(Id - P)}_{Q}\begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q^{cofatt} \cdot Q \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} = Q^{cofatt} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

$$\det Q \cdot \mathrm{Id} \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det Q \cdot m_1 \\ \vdots \\ \det Q \cdot m_n \end{pmatrix}$$

Sia $\quad x = \det Q \qquad x \in A$

$$x \cdot m_1 = 0 \quad \dots \quad x \cdot m_n = 0$$

$\{m_i\}$ generano M come A-modulo $\Rightarrow x \cdot M = 0$

$$x = \det(Q) = \det(Id - P) = 1 + \underbrace{\textstyle\sum \text{prodotti di termini di } P}_{\in I} = 1 + \underbrace{i}_{\in I}$$