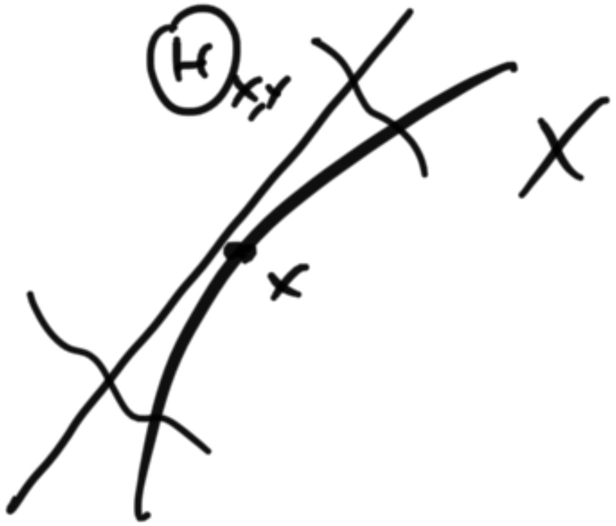
X varietà $\quad x \in X$ punto liscio

$$\dim_x X = \dim \mathcal{O}_{X,x}$$
$$\shortparallel$$
$$\max \dim X_i$$
$\{X_i$ componenti irriducibili di X che passa per $x\}$



Ci aspettiamo che in un intorno di x, coordinate lineari su $\mathcal{O}_{X,x}$ diano un sistema di coordinate locali su X.

Se $X \subseteq \mathbb{A}^2$ è una curva affine abbiamo già formalizzato questa nozione in modo algebrico: se x è un punto liscio di X, $\exists\ u \in K(X)$ (u regolare in un intorno U di x) che è un parametro locale attorno a x.

Quello che ci aspettiamo quindi è: se $\dim_x X = \dim \Theta_{X,x} = n$

$\Rightarrow \exists$ n parametri locali attorno a X.

È effettivamente così.

Ricordiamo il lemma di Nakayama.

A anello commutativo. $I \neq A$, I ideale. $S_I := 1 + I$.

Sia M un A-modulo finitamente generato.

Se $I \cdot M = M$, allora $\exists\ x \in S_I : xM = 0$.

Corollario: Supponiamo $S_I := 1 + I \subseteq A^*$ invertibili di A.

e sia $N \subseteq M$ finit. generato un sottomodulo tale che $M = N + IM$.

Allora $N = M$.

Dim: Consideriamo l'A-modulo M/N. È finitamente generato in quanto M è finitamente generato

$I \cdot M/N \overset{?}{=} M/N$. Chiaramente $I\, M/N \subseteq M/N$. Sia $[m] \in M/N$

$m \in M = N + IM \Rightarrow m = n + \sum i_k m_k \Rightarrow [m] = [n + \sum i_k m_k]$

$= [\sum i_k m_k] = \sum i_k [m_k] \in I\, M/N$. Quindi $M/N = I\, M/N$

$\Rightarrow \exists\, x \in S_I : x \cdot M/N = 0$. Ovvero $x[m] = [0]\ \forall m$

$\Rightarrow [xm] = [0] \Rightarrow xm \in N$. Ma $\exists\, x^{-1} \Rightarrow m \in x^{-1} N \subseteq N$

$\Rightarrow M \subseteq N \Rightarrow M = N$.

Corollario. Sia I un ideale di A, $I \neq A$, $S_I \subseteq A^*$.

Se $\{[m_1] \dots [m_n]\}$ genera M/IM, allora $\{m_1, \dots m_n\}$

genera M.

Dim: $N = \langle m_1, \dots m_n \rangle$

$M \overset{?}{=} N + IM$.

Sia $m \in M$. $[m] \in M/IM$. $[m] = \alpha_1 [m_1] + \dots + \alpha_n [m_n]$
$\alpha_i \in A$.

$$[m - \alpha_1 m_1 - \alpha_2 m_2 - \dots - \alpha_n m_n] = [0]$$

$$m - \underbrace{(\alpha_1 m_1 + \dots + \alpha_n m_n)}_{\in N} \in IM$$

$$\Rightarrow M = N + IM \Rightarrow N = M \Rightarrow M = \langle m_1 \dots m_n \rangle$$

Caso particolare: se (nelle ipotesi del corollario)

I è un ideale finitamente generato di $A \Rightarrow$

$\{[u_1] \dots [u_n]\}$ genera $I/I^2 \Rightarrow \{u_1 \dots u_n\}$ genera I.

<u>Oss</u>: se A è Noetheriano $\Rightarrow$ <u>ogni</u> ideale di A è finitamente generato

---

Ancora un corollario del lemma di Nakayama.

A Noetheriano. $I \neq A$, ideale. $S_I \subseteq A^*$.

$$\Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I^n = \{0\}$$

<u>Dim</u>: Sia $M = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I^n$. M è un ideale di A

$\Rightarrow$ M è finitamente generato. $IM = \bigcap I^{n+1} = \bigcap I^n$

A Noetheriano $= M$

$\Rightarrow \exists\, x \in S_I : xM = 0$. Ma x è invertibile per ipotesi $\Rightarrow M = 0$.

Torniamo a x punto liscio di X, $\dim X = n$.

$\dim \Theta_{X,x} = n$.

$$d_x : m_x / m_x^2 \xrightarrow{\sim} \Theta_{X,x}^* \qquad \left(m_x = m_x(\mathcal{O}_{X,x})\right)$$

(spazio cotangente a X in x)

$\Rightarrow \dim \Theta_{X,x}^* = n \Rightarrow \dim_{\mathbb{K}} \left(m_x / m_x^2\right) = n$

$\Rightarrow m_x / m_x^2$ è finitamente generato come $\mathbb{K}$-modulo

$\mathbb{K} \subseteq \mathcal{O}_{X,x} \Rightarrow m_x/m_x^2$ è finitamente generato come $\mathcal{O}_{X,x}$-modulo

Dal fatto che $\dim_{\mathbb{K}}\left(m_x/m_x^2\right) = n$ segue che esiste

una base $\{[u_1], \dots [u_n]\}$ di m_x/m_x^2 su $\mathbb{K}$.

$\Rightarrow \{[u_1] \dots [u_n]\}$ generano m_x/m_x^2 come $\mathcal{O}_{X,x}$-modulo

$I = m_x$; $I/I^2 = m_x/m_x^2$; $\mathcal{O}_{X,x}$ è noetheriano.

$$\left.\begin{array}{l} S_I = 1 + I \overset{?}{\subseteq} \mathcal{O}_{X,x}^* = \{ \varphi \in \mathcal{O}_{X,x} : \varphi(x) \neq 0 \} \\ \varphi \in 1 + I \Rightarrow \varphi \in 1 + m_x \Rightarrow \varphi(x) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow S_I \subseteq \mathcal{O}_{X,x}^*$$

$\Rightarrow \{u_1, \dots u_n\}$ generano m_x come $\mathcal{O}_{X,x}$-modulo.

questi sono i nostri n parametri locali attorno a x

Per costruzione $\{d_x u_1, \dots d_x u_n\}$ è una base di $\Theta^*_{X,x}$

Ogni u_i è una funzione regolare in un intorno di x, che si annulla in x.

$x \in V(u_i) \cap X = X_i \subseteq X$ (localmente attorno a x)

dim $\Theta_{X_i,x} = ?$

è definito dalle stesse equazioni che definiscono $\Theta_{X,x}$, con l'aggiunta dell'equazione $d_x u_i = 0$

$d_x u_i \equiv 0$ su $\Theta_{X,x} \to \{d_x u_1 = 0 \dots d_x u_n = 0\} = \{d_x u_1 = 0 \dots \cancel{d_x u_i = 0} \dots d_x u_n = 0\}$

oppure

$d_x u_i : \Theta \longrightarrow k$ è nonzero $\Rightarrow$ dim $\Theta_{\dots} = n-1$ $\uparrow$

$\lfloor\, d_x u_i : \mathcal{H}_{x,x} \to \ldots$ $\mathcal{H}_{x_i,x}$

sono $n-1$ equazioni lineari in $\mathcal{H}_{x,x}$ che ha dim n

$$\dim\{d_x u_1 = 0 \ldots d_x u_n = 0\} \geq 1 \Leftarrow \dim\{d_x u_1 = 0 \ldots \cancel{d_x u_i} = 0 \ldots d_x u_n = 0\} \geq 1 \Leftarrow$$

$\| \leftarrow \{d_x u_1, \ldots d_x u_n\}$ sono una base di $\mathcal{H}^*_{x,x}$

$\{0\}$

$\dim\{0\} \geq 1$ il che è chiaramente assurdo!

$$\Rightarrow \dim \mathcal{H}_{x_i,x} = n-1$$

$\dim_x X_i = ?$ $\begin{cases} \text{se } u_i \text{ si annulla identicamente su (una componente irriducibile di) } X \text{ (contenente il punto } x) \\ \text{se } u_i \text{ non si annulla identicamente su } (\ldots)\, X (\ldots) \end{cases}$

$\Rightarrow \dim_x X_i = n-1$

Sia Y la componente irriducibile di dim n su cui u_i si annulla. $u_i\big|_Y \equiv 0 \Rightarrow d_x u_i\big|_{\Theta_{Y,x}} \equiv 0 \Rightarrow \Theta_{Y,x} \subseteq \Theta_{X_i,x}$

$$\Rightarrow n = \dim_x Y \leq \dim \Theta_{Y,x} \leq \dim \Theta_{X_i,x} \leq \dim \Theta_{X,x} = n$$

$$\Rightarrow \underbrace{\dim \Theta_{X_i,x}}_{= n-1} = n$$

$n-1$ dimostrato prima!

Quindi u_i non si annulla identicamente $\Rightarrow \dim_x X_i = n-1$

In particolare $\dim_x X_i = \dim \Theta_{X_i,x} \Rightarrow x$ è liscio in ognuna delle X_i

Inoltre (in un intorno di x) $\bigcap X_i = \{x\}$.

Basta dimostrare che $\dim_x \bigcap X_i = 0$.

Supponiamo per assurdo $\exists\, Y$ componente irriducibile di $\bigcap X_i$ passante per x con $\dim Y \geq 1 \Rightarrow \dim \Theta_{Y,x} \geq 1$

$Y \subseteq \bigcap X_i \Rightarrow \Theta_{Y,Y} \subseteq \bigcap \Theta_{X_i,x} = \ker\{d_x u_1 \dots d_x u_n\} = 0$

il che contraddice $\dim \Theta_{Y,Y} \geq 1$.

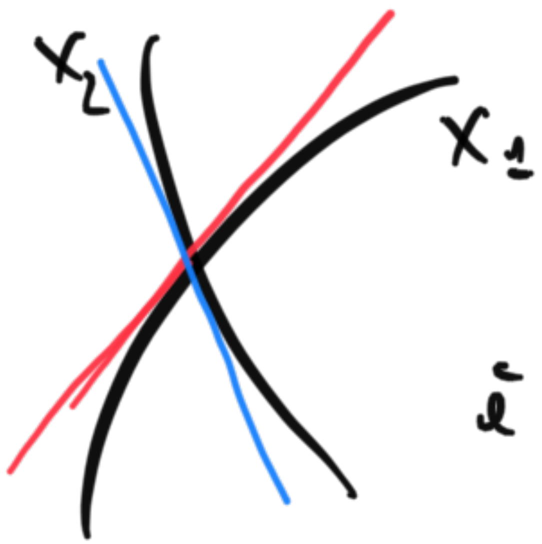
$\Rightarrow$ le X_i si intersecano in una sottovarietà che ha esattamente la dimensione dell'intersezione dei loro spazi tangenti, e questa è la minima

[illegible]

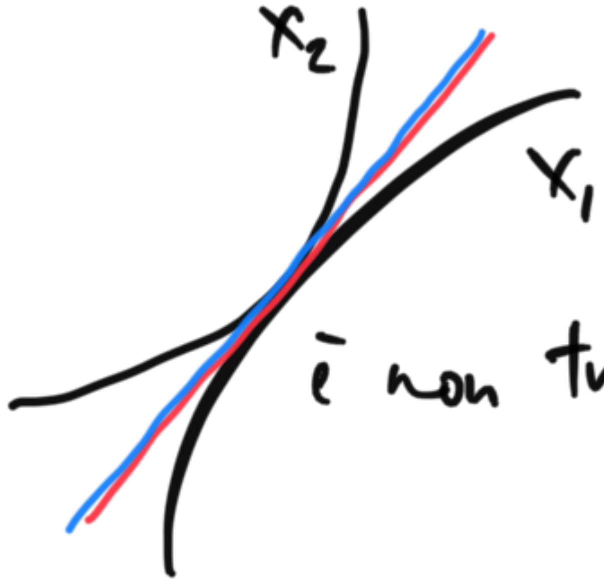
possibile (siamo cioè nelle situazioni generiche)

Si dice che le X_i si intersecano <u>trasversalmente</u> in x.

Esempi di intersezioni trasverse e non trasverse



è trasversa



è non trasversa.

Sviluppi di Taylor di elementi di $\mathcal{O}_{X,x}$

Indichiamo con x_0 il punto scelto in X e con x un punto generico di X. In questo modo scriviamo

$f(x)$ per un elemento in $\mathcal{O}_{X,x_0}$ (anziché scrivere $f \in \mathcal{O}_{X,x}$)

$$f(x) = \underset{\mathbb{K}}{\underset{\uparrow}{f(x_0)}} + \underbrace{\big(f(x) - f(x_0)\big)}_{m_x}$$

m_x come $\mathcal{O}_{X,x}$-modulo è generato da $u_1 \dots u_n$

$$f(x) - f(x_0) = \sum \underset{\mathcal{O}_{X,x}}{\underset{\uparrow}{a_i(x)}} \cdot u_i$$

$$f(x) = f(x_0) + \sum a_i(x) \cdot u_i$$

$$a_i(x) = a_i(x_0) + \sum a_{ij}(x)\, u_j$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \underset{\Bbbk}{\underset{\uparrow}{f(x_0)}} + \sum_i \underset{\Bbbk}{\underset{\uparrow}{a_i(x_0)}}\, u_i + \sum_{i,j} a_{ij}(x)\, u_i u_j$$

$$= \dots = a_0 + \sum_i a_{1,i}\, u_i + \sum_{i,j} a_{2,ij}\, u_i u_j + \dots$$

$$+ \sum_{i_1 \dots i_n} a_{n,i_1 \dots i_n}(x)\, u_{i_1} \cdots u_{i_n}$$

Ottengo così

$$f(x) = \sum_n \sum_{i_1 \dots i_n} a_{n,i_1 \dots i_n}\, u_{i_1} \cdots u_{i_n}$$

come serie formale. (Serie di Taylor di f rispetto ai parametri locali $u_1 \dots u_n$)

def: $T = (T^1 \dots T^n)$ variabili

$\mathbb{K}[[T]] = \mathbb{K}[[T^1, \dots T^n]]$ anello delle serie formali in T

è l'anello delle somme formali

$$F = F_0(T^1 \dots T^n) + F_1(T^1, \dots T^n) + F_2(T^1, \dots T^n) + \dots$$

con F_i omogeneo di grado i.

$$(F+G)_i = F_i + G_i$$

$$(F \cdot G)_i = \sum_{i_1+i_2=i} F_{i_1} \cdot G_{i_2}$$

$(T) = (T^1, \dots T^n)$ ideale di $\mathbb{K}[T]$

$$\cdots \to \mathbb{K}[T]/(T^3) \to \mathbb{K}[T]/(T^2) \to \mathbb{K}[T]/(T) \cong \mathbb{K}$$

$$\mathbb{K}[[T]] = \underset{n}{\underrightarrow{\lim}}\ \mathbb{K}[T]/(T^n)$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathbb{K}[T]/(T^i) \arrow[rr] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & & \mathbb{K}[T]/(T^{i+1}) \arrow[r] & \cdots \\
& & \mathbb{K}[[T]] \arrow[ul] \arrow[ur] & & \\
& & A \arrow[u, dashed] \arrow[uul, bend left] \arrow[uur, bend right] & &
\end{tikzcd}$$

$$\mathbb{K}[T] \hookrightarrow \mathbb{K}[[T]]$$

Oss: $\mathbb{K}[[T]]$ è un dominio di integrità

$$(F \cdot G \equiv 0 \Rightarrow F \equiv 0 \text{ oppure } G \equiv 0)$$

(basta vedere il prodotto del termine di grado più basso in F con il termine di grado più basso in G)

Def: diciamo che $F(T^1, \dots T^n) \in \mathbb{K}[[T^1, \dots T^n]]$ è una serie di Taylor per $f \in \mathcal{O}_{X, x_0}$ rispetto ai parametri locali $u_1, \dots u_n$ se

$$f(x) - \sum_{i=0}^{k} F_i(u_1 \dots u_n) \in m_{x_0}^{k+1}$$

Con la costruzione di prima abbiamo mostrato che

$\forall f \in \mathcal{O}_{X,x_0}$ ($x_0 \in X$ punto liscio), $\exists$ almeno una serie di Taylor.

Dimostriamo adesso che la serie di Taylor è unica!

Basta far vedere che $\exists$ serie di Taylor per $0 \Rightarrow F \equiv 0$.

Supponiamo $F \not\equiv 0$. $\exists\, F_k$ componente omogenea di grado minimo (non nulla)

Per definizione di serie di Taylor

$$0 - \sum_{i=0}^{k} F_i(u_1, \dots u_n) \in m_{x_0}^{k+1}$$

$$\Rightarrow F_k(u_1, \dots u_n) \in m_{x_0}^{k+1}$$

$F_k(T_1, \dots T^n)$ è polinomio omogeneo di grado k i...

$F_k(T^1, \dots T^n)$ e possiamo dividere in gradi in

$T^1, \dots T^n$.

$$F_k(T^1, \dots T^n) = \underset{\underset{K}{\cap}}{\alpha}(T^n)^k + G_1(T^1 \dots T^{n-1})(T^n)^{k-1} + \dots + G_k(T^1 \dots T^{n-1})$$

A meno di fare un cambio lineare di variabili possiamo supporre $\alpha \neq 0$. (es: $F_2(x,y) = xy$; $\begin{array}{l} x = s+t \\ y = t \end{array}$ $F_2(s+t,t) = st + t^2$)

Ogni elemento h di $m_{x_0}^{k+1}$ si può scrivere come

$$h = a_0 (u_n)^k + a_1 H_1(u_1 \dots u_{n-1})(u_n)^{k-1} + \dots \; a_k H_k(u_1 \dots u_{n-1})$$

dove $a_i \in m_{x_0}$; $H_i(u_1 \dots u_{n-1})$ è omogeneo di grado i in $u_1 \dots u_{n-1}$

Infatti: $\forall\, h \in m_{x_0}^{k+1}$ si può scrivere come

$$h = \sum \alpha_i \, \beta_i(u_1 \dots u_n) \quad \text{con } \alpha_i \in m_{x_0} \text{ e}$$

$\beta_i(u_1 \dots u_n)$ omogenee di grado i

$$\left(\begin{array}{ll} k=0 & h \in m_{x_0} \Rightarrow h = h \cdot 1 \\ k=1 & h \in m_x^2 \Rightarrow h = \sum f_i g_i \quad f_i, g_i \in m_x \end{array} \right.$$

$$g_i = \sum \underset{\mathcal{O}_{x,x_0}}{\lambda_{ij}} u_j \Rightarrow h = \sum \underbrace{f_i \lambda_{ij}}_{m_{x_0}} u_j$$

$\dots \quad)$

$$F_k(u_1, \dots u_n) = a_0 (u_n)^k + \dots + a_k H_k(u_1, \dots u_{n-1})$$

$$\parallel$$

$$\alpha (u_n)^k + G_1(u_1, \dots u_{n-1}) u_n^{k-1} + \dots G_k(u_1, \dots u_{n-1})$$

$$(\alpha - a_0)(u_n)^k = \dots \in \left(H_i(u_1 \dots u_{n-1}),\ G_j(u_1, \dots u_{n-1}) \right)$$

$$\subseteq (u_1, \dots u_{n-1})$$

$$\alpha - a_0 \Big|_{x_0} = \alpha \neq 0 \implies a - a_0 \text{ è invertibile in } \mathcal{O}_{X,x_0}$$

$$\implies (u_n)^k \in (u_1, \dots u_{n-1})$$

$$\underset{\overset{\parallel}{V(u_1) \cap V(u_2) \dots \cap V(u_{n-1})}}{V(u_1 \dots u_{n-1})} \subseteq V((u_n)^k) = V(u_n)$$

$$\implies \underbrace{V(u_1) \cap \dots \cap V(u_{n-1})}_{\text{ha dim} \geq 1} = \underset{\overset{\parallel}{X_1}}{V(u_1)} \cap \dots \cap \underset{\overset{\parallel}{X_n}}{V(u_n)} = \{x_0\}$$

Il che è assurd. $\Rightarrow$ Tutti i termini F_h sono 0.

$\Rightarrow F \equiv 0$.

$$\tau : \mathcal{O}_{X,x_0} \longrightarrow \mathbb{K}[[T]]$$

prendo la serie di Taylor.

$(T^1, \dots T^n) \qquad n = \dim_{x} X$

è ben definito e si vede subito essere un omomorfismo. Inoltre τ è iniettiva.

$$\ker(\tau) = \{ f : \tau(f) \equiv 0 \}$$

$\tau(f)_k = 0 \quad \forall k$

$$\tau(f) \equiv 0 \iff f - \sum_{i=0} \tau(f)_k \in m_{x_0}^{k+1}$$

$$\shortparallel$$

$$f$$

$$\tau(f) = 0 \iff f \in \bigcap_k m_{x_0}^{k+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Nakayama}}}{=} \{0\}$$

$$\tau : \mathcal{O}_{X,x_0} \hookrightarrow \mathbb{K}[[T]]$$

<u>Coroll</u>: $\mathcal{O}_{X,x_0}$ è un dominio (non ha divisori dello zero)

<u>Coroll</u>: x_0 appartiene ad esattamente una componente irriducibile di X

liscio di X

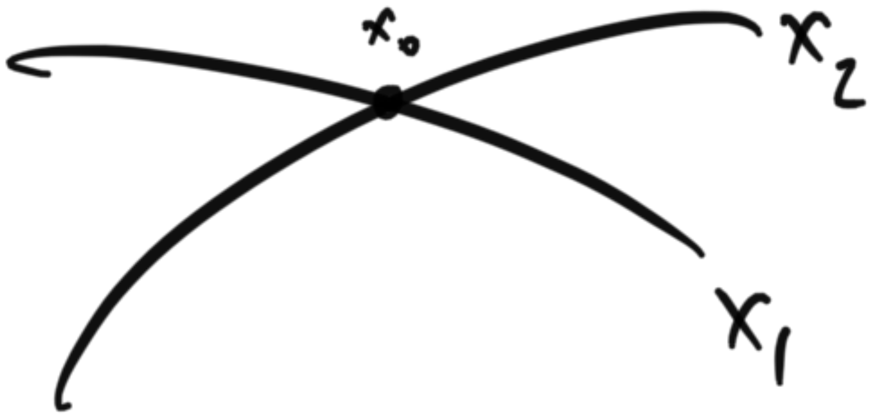
liscio in X

<u>dim</u>: se $x_0 \in X_1 \cap X_2$ $\quad \exists\ f|_{X_1} \equiv 0 \quad f|_{X_2} \not\equiv 0$

$X = X_1 \cup X_2$ $\qquad g|_{X_1} \not\equiv 0 \quad g|_{X_2} \equiv 0$

$$\Rightarrow f \cdot g \Big|_X \equiv 0$$

Analogo se $X = \bigcup X_i$



$x_0 \in X_1 \cap X_2$

$\Rightarrow x_0$ non è liscio

---

di X chiusa

<u>Oss</u>: i punti singolari di X sono un chiuso

<u>dim</u>: $X = \bigcup X_i$ $\quad X_i$ irriducibili

$$\mathrm{Sing}(X) = \bigcup_i \underbrace{\mathrm{Sing}(X_i)}_{\text{chiuso}} \cup \bigcup_{i,j} \underbrace{(X_i \cap X_j)}_{\text{chiuso}}$$

un'unione finita di chiusi è chiusa

<u>Oss</u>: un modo canonico di pensare τ

è

$$\tau : \mathcal{O}_{X,x_0} \longrightarrow \varprojlim \mathcal{O}_{X,x_0} / m_{x_0}^k =: \widehat{\mathcal{O}}_{X,x_0}$$

Ora questa ha senso anche per i punti singolari ma per i punti singolari non sarà in generale iniettiva.

Se x_0 è singolare $\hat{\mathcal{O}}_{X,x_0}$ non è un anello di serie formali!