X varietà $x \in X$

$\mathcal{O}_{X,x}$ anello locale di X in x

$\{\varphi$ regolari in un qualche intorno di $x\}$

$\{\varphi = \frac{f}{g} \quad g(x) \neq 0\}$

m_x ideale massimale di $\mathcal{O}_{X,x}$, che è un anello locale

$$\mathcal{O}_{X,x} \hookrightarrow \hat{\mathcal{O}}_{X,x} = \varprojlim_n \mathcal{O}_{X,x}/m_x^n$$

Se x è un punto liscio e $\dim_x X = n$

$$\hat{\mathcal{O}}_{X,x} \cong \mathbb{K}[[T^1, \dots T^n]]$$

scelta di parametri locali $u_1 \dots u_n$ per X attorno a x.

Qui $\mathbb{K}$ è un campo arbitrario (char 0, algebr. chiuso) non c'è topologia fissata su $\mathbb{K}$, quindi non ha senso chiedersi se le serie formali con cui lavoriamo siano convergenti.

Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ con l'usuale topologia euclidea, la domanda ha senso.

$$\varphi \in \mathcal{O}_{X,x} \text{ su } \mathbb{C}, \quad \varphi = \frac{f}{g} \quad g(x) \neq 0$$

φ è olomorfa in un intorno di x.

$\Rightarrow$ lo sviluppo di Taylor di φ converge in un intorno euclideo di x.

$x \in X$ $\quad$ x liscio

$$\mathcal{O}_{X,x} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{O}}_{X,x} \cong \mathbb{K}[[T^1, \dots T^n]]$$

A grandi linee: $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x} \cong \mathbb{K}[[T^1 \dots T^n]]$ è "quasi" un anello di polinomi. Da $\mathbb{K}[T^1, \dots T^n] \hookrightarrow \mathbb{K}[[T^1 \dots T^n]]$ intuisco che $\mathcal{O}_{X,x}$ debba essere "quasi" come $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ e quindi anche $\mathcal{O}_{X,x}$ debba essere "quasi" un anello di polinomi.

Questo mi suggerisce di così come l'algebra degli anelli di polinomi mi parla della geometria degli [illegible]

delle varietà affini, l'algebra di $\mathcal{O}_{X,x}$ si parli della geometria locale delle varietà, e tutti i "quasi" scritti prima ci suggeriscono che la geometria locale delle varietà sia molto simile alla geometria affine.

Idea geometrica (suggerita dalla geometria differenziale)

localmente attorno a x

$$\begin{array}{ccc} X & \sim & H_{x,X} \cong \mathbb{A}^n \\ \cup & & \cup \\ Y & \sim & \tilde{Y} \end{array}$$

Rapidi richiami di geometria delle varietà affini

$Y \subseteq \mathbb{A}^n \qquad Y \rightsquigarrow I_Y \subseteq \mathbb{K}[\mathbb{A}^n] = \mathbb{K}[T^1, \dots T^n]$

$$I_Y = \{ f : f|_Y = 0 \}$$

$Y \subseteq X \qquad Y \rightsquigarrow \underbrace{I_{Y,x}}_{\text{ideale locale di } Y} \subseteq \mathcal{O}_{X,x} \; ; \; I_{Y,x} = \{ \varphi \in \mathcal{O}_{X,x} : \varphi|_Y \equiv 0 \}$

$x \in Y$

Caso affine | Caso locale

$\mathbb{K}[T^1, \dots T^n]$ Noetheriano

$I_Y = (f_1 \dots f_k)$

$Y \subseteq \mathbb{A}^n$ codim $Y = 1$

$\Rightarrow I_Y = (g)$

$\mathbb{K}[T^1 \dots T^n]$ è un dominio a fattorizzazione unica

($Y \neq \mathbb{A}^n$ $\exists f \in \mathbb{K}[T^1 \dots T^n]$

$\mathcal{O}_{X,x}$ è Noetheriano

$I_{Y,x} = (f_1, \dots f_k)$ $f_i \in \mathcal{O}_{X,x}$

equazioni locali per Y attorno a x

$\mathcal{O}_{X,x}$ è un dominio a fattorizzazione unica?

Sicuramente $\mathcal{O}_{X,x}$ è un dominio (non ci sono divisori dello zero)

$\mathcal{O}_{X,x} \hookrightarrow \mathbb{K}[[T^1, \dots T^n]]$

è un dominio

$f \neq 0$, $f|_Y = 0$; $f = g_1 \cdots g_n$

g_i irriducibili (non necess. dist.)

$\Rightarrow \exists\, g_i : Y = V(g_i)$

(Y irriduc.)

se non è irriduc. $\Rightarrow Y = \bigcup Y_j$

$$Y = \bigcup V(g_{ij}) = V\Big(\prod_j g_{ij}\Big)$$

Posso sperare:

i) $K[[T^1, \dots, T^n]]$ sia a fattorizzazione unica

ii) che questa proprietà passi al sottoanello $\mathcal{O}_{X,x}$

Attenzione $A \hookrightarrow B$, B dominio a fattorizz. unica $\not\Rightarrow$ A sia a fattorizz. unica

(es: $A = \mathbb{Z}[\sqrt{5}i] \hookrightarrow \mathbb{C} = B$

$\mathbb{C}$ è un campo $\Rightarrow$ è UFD

ma A non è UFD

$$6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{5}i)(1 - \sqrt{5}i)$$

Conseguenza geometrica

X varietà liscia, $\varphi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ mappa razionale

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "\varphi"] & \mathbb{P}^n \\ U \arrow[u, hook] \arrow[ur, "\tilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

U aperto denso

$Y = X \setminus U$ luogo di indeterminazione

$Y \subseteq X$ è un divisore.

$\rightarrow$ $\boxed{\mathrm{codim}_X Y \geq 2}$

Corollario: Se X è una curva liscia ($\dim X = 1$)

$\varphi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n \Rightarrow \varphi$ è regolare (definita su tutto X)

$\dim Y \leq 1-2 = -1 \Rightarrow Y = \emptyset.$

Lo avevamo già dimostrato sfruttando il fatto che se X è una curva liscia, $\forall x \in X \; \exists$ un parametro locale per X attorno a x.

dimostriamo il teorema

L'enunciato è locale (basta vedere cosa succede attorno a ogni punto $x \in Y$)

$\varphi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ localmente è

$\varphi = (f_0, \dots f_m)$ $\quad f_i$ regolari in un intorno di x

$f_i \in \mathcal{O}_{X,x}$

$\mathcal{O}_{X,x}$ dominio a fatt. unica. Posso scrivere

$f_i = h \cdot \tilde{f}_i$ $\quad h$ massimo comun divisore delle f_i

$[f_1 : \dots : f_m] = [\tilde{f}_1 ; \dots \tilde{f}_m]$ $\quad \tilde{f}_i \in \mathcal{O}_{X,x}$

prive di fattori comuni

Il luogo di indeterminazione di φ attorno a x è

il luogo degli zeri comuni di $\{\hat{f}_i\}$.

Se questo luogo contiene Y con codim $Y = 1$

$y \in V(\tilde{f}_i)$ (localuto attorno a x)

$\tilde{f}_i\big|_y \Rightarrow \tilde{f}_i \in I_{y,x} = (g) \Rightarrow \tilde{f}_i$ è multiplo di g

codim $y = 1$

$\Rightarrow I_{y,x}$ è principale

$\Rightarrow g$ è un fattore comune alle $\tilde{f}_i$. Contro la costruzione

---

Corollario

Se X_1, X_2 sono curve proiettive

$X_1 \hookrightarrow \mathbb{P}^{n_1} \qquad X_2 \hookrightarrow \mathbb{P}^{n_2}$

Allora $X_1 \overset{\sim}{\dashleftarrow\dashrightarrow} X_2 \iff X_1 \overset{\sim}{\longleftrightarrow} X_2$

birazionalmente equivalenti — isomorfe

Oss: Su $\mathbb{C}$ ogni varietà proiettiva liscia ha una naturale struttura di varietà olomorfa

$\Rightarrow$ ha una naturale struttura di varietà differenziabile

$\Rightarrow$ ha una naturale struttura di spazio topologico

In particolare

$X_1/\mathbb{C}$, $X_2/\mathbb{C}$ curve proiettive definite su $\mathbb{C}$

$\Rightarrow \left[X_1 \overset{\sim}{\dashleftarrow\dashrightarrow} X_2 \implies X_1 \text{ omeomorfa } X_2 \right]$

Quindi X_1 non è omeomorfo a X_2 come sp. top $\Rightarrow$ X_1 non può essere birazionalmente equivalente a X_2

Dimostriamo per passi che $\mathcal{O}_{x,X}$ è UFD.

i) $\mathbb{K}[[T^1 \dots T^n]]$ è UFD

Ricordiamoci come si dimostra che $\mathbb{K}[T^1, \dots T^n]$ è UFD

A UFD $\Longrightarrow$ $A[x]$ UFD

$\mathbb{K}$ campo $\Rightarrow$ $\mathbb{K}$ UFD $\Rightarrow$ $\mathbb{K}[T^1]$ UFD

$\Rightarrow$ $\mathbb{K}[T^1, T^2] = \mathbb{K}[T^1][T^2]$ $\Rightarrow$ $\mathbb{K}[T^1, T^2]$ è UFD

$\uparrow$
UFD

...

Supponiamo di aver dimostrato che $\mathbb{K}[[T]]$ sia UFD. Posso dedurre che $\mathbb{K}[[T^1,T^2]]$ è UFD?

$$\mathbb{K}[[T^1,T^2]] = \mathbb{K}[[T^1]][[T^2]]$$
$$\cup\!\!\mathsf{I}$$
$$\mathbb{K}[[T^1]][T^2]$$

$\uparrow$
so già che è UFD

$\Longrightarrow$ $\mathbb{K}[[T^1]][T^2]$ è UFD

$A \Rightarrow A[T]$

Supponiamo sia vera la seguente cosa:

$$\forall \; f(T^1,T^2) \in \mathbb{K}[[T^1,T^2]] \quad \exists \; u \in \mathbb{K}[[T^1,T^2]]^{\times}$$

$$\text{t.c.} \quad u \cdot f = p \qquad p \in \mathbb{K}[[T^1]][T^2]$$

In una variabile è vero!

$$f(T) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T^k = \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k T^k \quad \text{con} \quad a_{k_0} \neq 0$$

$$= T^{k_0} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k T^{k-k_0} \right)$$

$$= T^{k_0} \left(\overbrace{\underset{\substack{\neq \\ 0}}{a_{k_0}} + \underset{\substack{\uparrow \\ O(T)}}{\cdots}}^{u} \right)$$

il che peraltro mi dimostra che $\mathbb{K}[[T]]$ è UFD

In effetti l'affermazione è vera in generale.

Questo risultato va sotto il nome di lemma di preparazione di Weierstrass.

dimostriamolo per $\mathbb{K}[[x,y,z]]$ in un caso particolare

$$f(x,y,z) = \sum f_k(x,y,z) \qquad f_k \text{ omogeneo di grado } k$$

supponiamo nel nostro esempio k minimo t.c. $f_k \neq 0$ sia $k=2$. Non è restrittivo (a meno di un cambio lineare di variabili) supporre $f_2(x,y,z) = \alpha x^2 + \beta(y,z)x + \gamma(y,z)$

con $\alpha \neq 0$

$$f(x,y,z) = \alpha x^2 + \beta(y,z)x + \gamma(y,z) + f_3(x,y,z) + f_4(x,y,z) + \dots$$

$$x^2\varphi(x,y,z) + x\psi(y,z) + \eta(y,z)$$

$$= \underbrace{\left(\alpha + \varphi(x,y,z)\right)}_{v} x^2 + \left(\beta(y,z) + \psi(y,z)\right) x + \left(\gamma(y,z) + \eta(y,z)\right)$$

$\varphi(x,y,z) \in \mathbb{K}[[x,y,z]]$ $\qquad \varphi = \varphi_1(x,y,z) + \varphi_2(x,y,z) + \dots$

$$\Rightarrow \varphi(0,0,0) = 0$$

$$\alpha + \varphi(x,y,z)\Big|_{(0,0,0)} = \alpha \neq 0$$

$v(x,y,z) \in \mathbb{K}[[x,y,z]]^*$; sia $u = v^{-1}$

$$u f = x^2 + u\left(\beta(y,z) + \psi(y,z)\right) x + u\left(\gamma(y,z) + \eta(y,z)\right)$$

$\mathbb{K}[[y,z]]$

$\mathbb{K}[[x,y,z]]^*$

Ho "liberato" il termine x^2. Lavorando iterativamente alla fine trovo $\tilde{u} f = A(y,z)\, x^2 + B(y,z)\, x + C(y,z)$

con $A, B, C \in \mathbb{K}[[y,z]]$.

Adesso deduciamo che $\mathcal{O}_{X,x}$ è UFD.

$\mathcal{O}_{X,x}$ è locale, m_x ideale massimale

$\hat{\mathcal{O}}_{X,x} = \mathbb{K}[[T^1 \dots T^n]]$ è locale $\hat{m}_x$ ideale massimale

$$\hat{m}_x = \{ f : f(x) = 0 \}$$

f il cui sviluppo di Taylor in x ha termine costante uguale a 0.

$$\hat{m}_x = m_x \cdot \hat{O}_{X,x}$$

$$f \in \hat{m}_x = f(T^1, \dots T^n) = \underset{\hat{m}_x}{T^1}\, \overset{\hat{O}_{X,x}}{f_1}(T^1 \dots T^n) + T^2\, \overset{\hat{O}_{X,x}}{f_2}(T^1 \dots T^n)$$

$$+ \dots \underset{\hat{m}_x}{T^n} \cdot f_n(T^1 \dots T^n)$$

$$(T^i \leftrightarrow \underset{\hat{m}_x}{u_i})$$

Siamo in queste ipotesi:

$$A \hookrightarrow \hat{A} \quad , \quad A, \hat{A} \text{ locali}$$

$$\hat{m} = mA$$

Inoltre A è Noetheriano (ogni ideale di A è finitamente generato)

Infine A è "denso" in $\hat{A}$ nel seguente senso:

$\forall \alpha \in \hat{A} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ \exists a \in A : \alpha = a + \xi$

$\xi \in \hat{m}^n$

(Nel caso di $\mathcal{O}_{X,x}$ stiamo semplicemente dicendo che una serie formale può essere sempre scritta come una funzione regolare più una serie formale che si annulla almeno n volte in x

$$f = \Big(\underbrace{f_0 + f_1 + \dots + f_{n-1}}_{f_{reg}^{(n)}} + \underbrace{f_n + f_{n+1} + \dots}_{\hat{m}^n} \Big)$$

Sotto queste ipotesi vale che $[\hat{A}$ UFD $\Rightarrow A$ è UFD$]$

Cenno della dimostrazione.

A UFD significa (è equivalente) a

se $a \mid bc$ e a e b non hanno divisori comuni $\Rightarrow a \mid c$

(infatti se $x = p_1 \cdots p_n = q_1 \cdots q_h \Rightarrow p_1 \mid q_1 \cdots q_h$

$\Rightarrow p_1 \mid q_i$ per qualche i $\Rightarrow p_1 = q_i u_i$ u_i

invertibile ...)

Voglio dimostrare che

$a, b, c \in A$ e $a \mid b \cdot c$ in A

e a e b non hanno fattori

comuni in A

$$\Downarrow ?$$

i) $a \mid b \cdot c$ in $\hat{A}$ (ovvio)

ii) a e b non hanno fattori comuni in $\hat{A}$

$$\Downarrow \quad \hat{A} \text{ è UFD}$$

$a \mid c$ in $\hat{A}$

$$\Downarrow \, ?$$

$a \mid c$ in A

Dimostrare il teorema si riduce a

•) a e b hanno un fattore comune in $\hat{A}$

$\Rightarrow$ a e b avevano un fattore comune già in A

••) $a \mid b$ in $\hat{A} \Rightarrow a \mid b$ in A.

Come si dimostrano •) e ••)? ciò che accade in

$\hat{A}$ è approssimato sufficientemente bene da

come in A. A questo punto si sfrutta il

fatto che A è noetheriano e quindi

$\bigcap m^n = \{0\}$. $\Rightarrow$ approssimazione troppo buona porta

a un'uguaglianza

Fin qui abbiamo dimostrato che se codim $Y = 1$

$\Rightarrow$ Y si può definire con 1 equazione.

Vero affinemente, vero localmente attorno a x.

Cosa succede in codimensione più alta?

Es: se codim $Y = 2$, possiamo sempre definire Y con 2 equazioni?

Questo non è vero neppure affinemente!

Es (esercizio) in $\mathbb{A}^3$, Y = unione dei tre assi

$$I_Y = (xy, xz, yz)$$

$\dim Y = \max \dim Y_i = \max \dim \{$asse x, asse y, asse $z\}$

$= 1$

$\operatorname{codim}_{\mathbb{A}^3} Y = 2$

$\exists ?\ f(x,y,z),\ g(x,y,z) \ : \ I_Y = (f,g)\ ?$

La risposta è no! (verificatelo)

Il problema è causato dal fatto che

$O \in Y$ è molto singolare 

Fuori dall'origine Y = asse e

ad esempio asse $x = \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

In generale vale:

$x \in X$ punto liscio

$Y \subseteq X$ $\quad \operatorname{codim}_x Y = m$; x liscio per Y

$\Rightarrow I_{Y,x}$ si può generare con m elementi.

Se $\quad n = \dim_x X = \dim \mathcal{O}_{X,x} = \dim \mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2$

$\quad n - m = \dim_x Y = \dim \mathcal{O}_{Y,x} = \dim \mathfrak{m}_y / \mathfrak{m}_y^2$

$Y \subseteq X \Rightarrow \mathcal{O} \hookrightarrow \mathcal{O} \Rightarrow \mathcal{O}^* \twoheadrightarrow \mathcal{O}^*$

$_{y,y}$ $\quad$ $_{x,x}$ $\quad$ $_{x,x}$ suriett $\quad$ $_{y,x}$

$$\underset{\dim n}{m_x/m_y^2} \xrightarrow{l_y} \underset{\dim n-m}{m_y/m_y^2}$$

$\ker(l_y)$ ha $\dim = m$

Scelgo una base $u_1 \dots u_n$ di m_x/m_x^2

t.c. $\underbrace{u_1 \dots u_m}_{\text{base di } \ker l_y}, u_{m+1} \dots u_n$

$u_1\big|_Y \equiv 0 \quad \dots \quad u_m\big|_Y \equiv 0$

$$Y \subseteq V(u_1) \cap \dots \cap V(u_m)$$

ha codim m

è una varietà liscia di codim m

$$\Rightarrow \quad Y = V(u_1) \cap \dots \cap V(u_m) \quad \text{(localmente attorno a } x\text{)}$$

$$\Rightarrow I_{y,y} = (u_1, \dots, u_m).$$