$f : X \longrightarrow Y$ X, Y affini, f regolare finita

$\Rightarrow f$ suriettiva

Lemma di Nakayama : A anello commutativo
M A-modulo finito su A
I ideale di A.

Se $I \cdot M = M$, allora $\exists\, x \in S_I = \{1 + i, i \in I\}$
t.c. $x \cdot M = 0$

Corollario : $A \subseteq B$ A sottoanello di B
B sia un A-modulo finito (B è intero su A)
I_A ideale di A t.c. $I_A \cdot B = B$
Allora $I_A = A$

<u>Dim</u>: Siamo nelle ipotesi del lemma di Nakayama con

$$M = B. \Rightarrow \exists\ \underset{\uparrow}{x} \in S_{I_A} : x \cdot B = 0$$

$$\Rightarrow x \cdot 1 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow 0 \in S_{I_A} \Rightarrow 0 = 1 + \underset{\substack{\uparrow \\ I_A}}{i}$$

$$\Rightarrow 1 = -i \in I_A \Rightarrow I_A = A.$$

$f : X \to Y$ finito (tutto affine)

$f^* : \underset{\shortparallel\ A}{\mathbb{K}[Y]} \hookrightarrow \underset{\shortparallel\ B}{\mathbb{K}[X]}$ è iniettiva e

$\mathbb{K}[X]$ è finito su $\mathbb{K}[Y]$.

Supponiamo f non suriettiva. $\exists\ y_0 = (\alpha^1, \dots \alpha^n) \in Y \subseteq \mathbb{A}^n$

t.c. $y_0 \notin f(X)$. $y_0 \rightsquigarrow m_{y_0} = \underset{\substack{\shortparallel \\ I_A}}{(y^1 - \alpha^1, \dots y^n - \alpha^n)} \subseteq \mathbb{K}[Y] = A$

$\downarrow$

$f^{-1}(y_0) = \emptyset$

$f^{-1}(y_0) = \phi$

$$\Rightarrow I(f^{-1}(y_0)) = I\phi = \mathbb{K}[X] = B$$

$$\parallel$$

$$(f^* I_A) \cdot B$$

$I_A \cdot B$ dove stiamo vedendo B come A-modulo mediante f^*.

$\Rightarrow I_A = A \Rightarrow m_{y_0} = \mathbb{K}[Y] \Rightarrow$ ogni elemento di $\mathbb{K}[Y]$ si annulla in $y_0 \Rightarrow 1|_{y_0} \equiv 0$, il che è assurdo.

La suriettività delle mappe finite ha molte conseguenze

i) $f : X \to Y$ è finita $\Rightarrow f$ è chiusa (è possibile definire una nozione di mappa

ii) $f : X \to Y$ [illegible] X, Y quasiproiettive

ii) $f: X \to Y$ dominante con X e Y quasi-p ... (... finite tra varietà quasi-proiet)

$\Longrightarrow f(X)$ contiene un aperto di Y

iii) $X \subseteq \mathbb{P}^n$ proiettiva E sottospazio lineare di $\mathbb{P}^n$

$E \cap X = \emptyset$, $\pi_E|_X : X \longrightarrow \pi_E(X)$ è finita

iv) $X \subseteq \mathbb{P}^n$, $\exists$ $\varphi: X \longrightarrow \mathbb{P}^k$ finita (Teorema di normalizzazione di Noether)

---

i) $f: X \to Y$ finita $\Rightarrow$ f chiusa

dim: Z chiuso di X. Voglio dimostrare che $f(Z)$ è chiuso di Y. Ovvero $f(Z) = \overline{f(Z)}$

$$f|_Z : Z \longrightarrow \overline{f(Z)}$$

chiuso della varietà affine Y

$\Rightarrow \overline{f(Z)}$ è una varietà affine

chiuso della varietà affine $X \Rightarrow Z$ è varietà affine

Se $f|_Z : Z \to \overline{f(Z)}$ è finita $\Rightarrow$ è suriettiva

$\Rightarrow f(Z) = \overline{f(Z)}$.

dimostriamo che $f|_Z : Z \to \overline{f(Z)}$ è finita

$f^* : \mathbb{K}[\overline{f(Z)}] \longrightarrow \mathbb{K}[Z]$ è iniettiva e

$\mathbb{K}[Z]$ è finito su $\mathbb{K}[\overline{f(Z)}]$

$I(Z) \subset \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[Z] \longrightarrow 0$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I(Z) \arrow[r] & \mathbb{K}[X] \arrow[r] & \mathbb{K}[Z] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & I(\overline{f(Z)}) \arrow[r] & \mathbb{K}[Y] \arrow[r] \arrow[u, "f^*"] & \mathbb{K}[\overline{f(Z)}] \arrow[r] \arrow[u, "f^*"] & 0
\end{tikzcd}$$

$\leftarrow$ iniettiva ?

$$I(\overline{f(Z)}) = ?$$

$$= \{ g \in \mathbb{K}[Y] : g|_{\overline{f(Z)}} = 0 \} = \{ g \in \mathbb{K}[Y] : g|_{f(Z)} = 0 \}$$

$$= \{ g \in \mathbb{K}[Y] : f^* g|_Z = 0 \} = \{ g \in \mathbb{K}[Y] : f^* g \in I(Z) \}$$

$$= (f^*)^{-1}(I(Z))$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I(Z) \arrow[r, "incl"] & \mathbb{K}[X] \arrow[r, "|_Z"] & \mathbb{K}[Z] \arrow[r] & 0 \\
 & (f^*)^{-1}(I(Z)) \arrow[u, "f^*"] \arrow[r] & \mathbb{K}[Y] \arrow[u, "f^*"] \arrow[r] & \mathbb{K}[\overline{f(Z)}] \arrow[u, "(f|_Z)^*"] &
\end{tikzcd}$$

$f^*\eta \longmapsto f^*\eta \longmapsto 0$

$$0 \to (f^*)(I(Z)) \longrightarrow \mathbb{K}[Y] \longrightarrow \mathbb{K}[\overline{f(Z)}] \longrightarrow 0$$

$$\eta \xrightarrow{id} \eta \longmapsto \gamma$$

$$\gamma \in \mathbb{K}[\overline{f(Z)}] : f^*\gamma = 0 \Rightarrow f^*\eta \in I(Z) \Rightarrow$$

$$\eta \in (f^*)^{-1}(I(Z)) \Rightarrow \eta \in \operatorname{Ker} \Phi \Rightarrow \gamma = 0.$$

$$\Phi = |_{\overline{f(Z)}}$$

$$|_Z : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[Z]$$

Siano $m_1, \dots, m_n$ generatori di $\mathbb{K}[X]$ su $\mathbb{K}[Y]$. $\forall \alpha \in \mathbb{K}[Z]$,

$$\alpha = (f^* a_1 m_1 + \dots + f^* a_n m_n)|_Z = \left((f|_Z)^* \Phi(a_1)\right) \cdot m_1|_Z + \dots \left((f|_Z)^* \Phi(a_n)\right) m_n|_Z$$

$a_i \in \mathbb{K}[Y]$ $\quad$ $\Phi(a_i) \in \mathbb{K}[\overline{f(Z)}]$

$\Rightarrow m_1|_Z, \dots, m_n|_Z$ generano $\mathbb{K}[Z]$ su $\mathbb{K}[\overline{f(Z)}]$

<u>Lemma</u>: Per un'applicazione regolare tra varietà affini essere finito è una proprietà locale.

$f: X \longrightarrow Y$ affini.

Se $\forall y \in Y$ $\exists U$ affine con $y \in U$ t.c.

$V = f^{-1}(U)$ è anch'essa affine e $f|_V : V \to U$

è finita $\Rightarrow$ f è finita.

<u>Dim</u>: $y \in Y$. Sia U un intorno affine di y con

$V = f^{-1}(U)$ affine in X.

<u>Aperti principali</u> (saranno una base della topologia di Zariski). Sono i complementari di $V(I)$ con I principale. $\Rightarrow$ Sono i complementari di $V(f)$

Scriviamo $D(f) = X \setminus V(f)$ $\quad X$ affine.

i) gli aperti principali sono una base della top di Zariski

U aperto qualunque $\Rightarrow U = X \setminus V(I)$

$$\Rightarrow U = X \setminus \underset{\bigcap V(f_i)}{\underset{\parallel}{V(f_1, \dots, f_n)}} = \bigcup \left(X \setminus V(f_i) \right) = \bigcup D(f_i)$$

ii) $D(f)$ è esso stesso una varietà affine

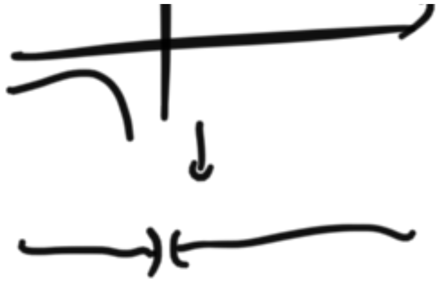
$$D(f) = \{ x : f(x) \neq 0 \} = \{ x : \exists\, y \text{ con } y \cdot f(x) = 1 \}$$

$$\begin{array}{ccc} X \times \mathbb{A}^1 & \supseteq & \{ (x,y) : y \cdot f(x) = 1 \} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \wr} \\ X & & D(f) \end{array}$$

$\nwarrow$ è una varietà affine

Es in $\mathbb{A}^1$ l'aperto $\{x \neq 0\}$ è isomorfo a

$\{(x,y) \in \mathbb{A}^2 : xy = 1\}$



$f: X \to Y$ localmente finita

$y_0 \in Y$ $\exists$ $U \ni y_0$: $V = f^{-1}(U)$ è affine in X

$f|_V : V \longrightarrow U$

Sia $U_0 \subseteq U$ un aperto principale $U_0 = \{ g \neq 0 \}$

$$f^{-1}(U_0) = \{ x \in V : f(x) \in U_0 \} = \{ x \in V : g(f(x)) \neq 0 \}$$
$$= \{ x \in V : (f^* g)(x) \neq 0 \}$$

Ovvero se $U_0 = D(g) \Rightarrow f^{-1}(U_0) = D(f^* g)$

Posso supporre U, V principali. $\Rightarrow$ U e V sono varietà affini. $f|_V : V \to U$ è un'applicazione regolare tra varietà affini $\Rightarrow$ so dare un significato al fatto che $f|_V : V \to U$ sia finita

[problemi di trasmissione ...]

Riprendiamo con:

Def: $f : X \to Y$ regolare tra varietà quasi-proiettive. f si dice <u>finita</u> se $\forall y \in Y$ $\exists$ $U \ni y$ aperto <u>affine</u> t.c. $V = f^{-1}(U)$ sia affine e $f|_V : V \to U$ sia finita.

Esempio di f regolare tra quasi-proiettive con U affine $f^{-1}(U)$ non affine

i) $\mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{A}^0$ costante

ii) $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^1 \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{A}^1$

$U \subseteq \mathbb{A}^1$ $\pi_2^{-1}(U) = \mathbb{P}^1 \times U$ e $\mathbb{P}^1 \times U$ non è affine. ($\mathbb{P}^1 \simeq \mathbb{P}^1 \times \{0\} \hookrightarrow \mathbb{P}^1 \times U \Rightarrow \exists$ applicazione non costante da una varietà proiettiva in $\mathbb{P}^1 \times U$)

Corollari immediati

i) $f: X \to Y$ finita X, Y quasi-proiettive $\Rightarrow$ f è suriettiva

$\forall\, y_0 \in Y$, $f|_V : V \to U$ è suriettiva

$\Rightarrow \exists\, x_0 \in \underset{\underset{X}{\cap}}{V} \;:\; f(x_0) = y_0$

ii) $f : X \to Y$ finita, X, Y quasi-proiettive

$\Rightarrow$ f è chiusa

<u>Dim</u>: Z chiuso di X, $f|_Z : Z \to \overline{f(Z)}$

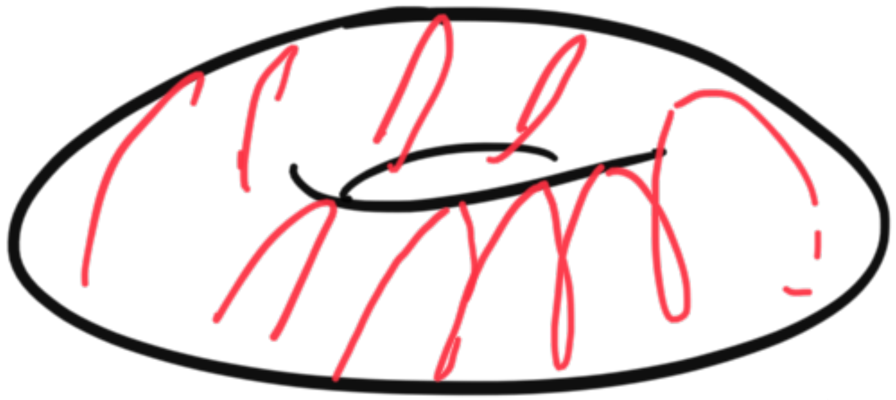
è finita (lo si vede localmente (dim precedente)). A questo punto per suriettività (punto i)) $f(Z) = \overline{f(Z)}$.

Corollario non banale:

$f : X \to Y$ dominante, X, Y quasi-proiett

$\Rightarrow f(X)$ contiene un aperto di Y

(Oss: questo non è vero nel mondo differenziale

$\mathbb{R} \overset{\varphi}{\hookrightarrow}$ 

$$\begin{array}{ccc} \| & & \cong \\ \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \\ t & \longmapsto & \left[t\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}\right] \end{array}$$

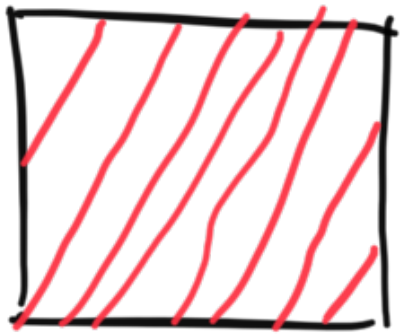


Immagine φ è densa $\Rightarrow$ φ è dominante ma Immagine f non contiene alcun aperto)

Idea della dimostrazione: possiamo fattorizzare f come
(a meno di restringersi al caso affine)

$$\begin{tikzcd} & Y \times \mathbb{A}^r \arrow[d, "\pi_1"] \\ X \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

in modo tale che Immagine (h) contenga un aperto principale di $Y \times \mathbb{A}^r$. A quel punto si vede che la proiezione di un aperto principale contiene degli aperti

(idea nell' idea: $f^*: \mathbb{K}[Y] \hookrightarrow \mathbb{K}[X]$ è iniettiva

$\Rightarrow K(Y)$ è un sottocampo di $\mathbb{K}(X)$, $\mathbb{K}(X)$ finitamente generato su $\mathbb{K}(Y) \Rightarrow K(X)$ avrà un certo grado di trascendenza r con $\mathbb{K}(y)\dots$)

<u>Teorema</u>: $X \subseteq \mathbb{P}^n$ proiettiva $\quad E \subseteq \mathbb{P}^n$, $\quad E \cap X$

$$\pi_E : X \longrightarrow \underset{\mathbb{P}^k}{\underset{\cap}{\pi_E(X)}} \quad \text{è finita}$$

<u>Dim</u>: per non perdersi con gli indici, nella dimostrazione fisso tutti gli indici a valori numerici

$$\underset{\mathbb{P}(\mathbb{K}^5)}{X \subseteq \mathbb{P}^4} \qquad \dim \underset{\mathbb{P}(\mathbb{K}^2)}{E} = 1$$

$$\pi_E : \mathbb{P}^4 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$$

$$[x^0 : x^1 : x^2 : x^3 : x^4] \longrightarrow [x^0 : x^1 : x^2]$$

$[x^0:x^1:x^2:x^3:x^4] \longmapsto [\dots]$

$\begin{pmatrix} x^0=0 \\ x^1=0 \\ x^2=0 \end{pmatrix} \leftarrow$ equazioni di E

$U_0^{\mathbb{P}^4} = \{x^0 \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^4$; $\quad U_0^{\mathbb{P}^2} = \{x^0 \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^2$

$$\pi_E : U_0^{\mathbb{P}^4} \longrightarrow U_0^{\mathbb{P}^2}$$

$X \cap E = \emptyset \Rightarrow \pi_E$ è definita su tutto X

$$\pi_E : X \cap U_0^{\mathbb{P}^4} \longrightarrow \pi_E(X) \cap U_0^{\mathbb{P}^2}$$

$\uparrow$ aperti affini di X $\qquad$ $\uparrow$ aperti affini di $\pi_E(X)$

Lo stesso per $U_i^{\mathbb{P}^4}$, $i=0,\dots 4$.

voglio dimostrare che

$$\mathbb{K}[U_0^{\mathbb{P}^2} \cap \pi(X)] \xrightarrow{\pi_E^*} \mathbb{K}[U_0^{\mathbb{P}^4} \cap X]$$

e che l'anello a destra è una estensione finita

ovvero $\forall g \in \mathbb{K}[U_0^{\mathbb{P}^4} \cap X]$ è intero su $\mathbb{K}[U_0^{\mathbb{P}^2} \cap \pi(X)]$

g è un polinomio in $\frac{x^1}{x^0}, \frac{x^2}{x^0} \dots \frac{x^4}{x^0}$

$$g = \frac{G(x^0, x^1, \dots x^4)}{(x^0)^m} \qquad G \text{ omogeneo di grado } m$$

Es: $m = 8$

coordinate $[y^0 : y^1 : y^2 : y^3]$

$$\varphi : X \longrightarrow \mathbb{P}^3$$

$$[x^0 : \dots x^4] \longmapsto [(x^0)^8 : (x^1)^8 : (x^2)^8 : h(\vec{x})]$$

$\varphi(X)$ è un diviso di $\mathbb{P}^3$

$\exists\ F_1 \dots F_{71}$ polinomi omogenei in y^0, y^1, y^2, y^3

t.c. $\varphi(X)$ è il luogo degli zeri di (F_i)

$[0:0:0:1] \notin \varphi(X)$

$[0:0:0:1]$ non soddisfa contemporaneamente le equazioni

$F_i = 0$

$p \in \mathbb{P}^3$, $y^0(p) = 0$ $y^1(p) = 0$, $y^2(p) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow p = [0:0:0:1]$

$$\left.\begin{cases} y^0=0 & F_1=0 & \dots \\ y^1=0 & F_2=0 & \\ y^2=0 & \dots & F_{71}=0 \end{cases}\right\} \text{ non ha soluzioni}$$

$(y^0, y^1, y^2, F_1, \dots F_{71}) \supseteq I_k$ per qualche k

Posso scegliere $k >$ grado F_i $\forall i = 1, \dots 71$

Ad esempio potremmo avere $k = 108$ va bene.

$\forall$ m monomio in y^0, y^1, y^2, y^3 di grado 108,

$m \in (y^0, y^1, y^2, F_1 \dots F_{71})$

In particolare $(y^3)^{108} \in (y^0, \dots F_{71})$

$(y^3)^{108}$

$$(y^3)^{\ } = y^0 \cdot H_0 + y^1 \cdot H_1 + y^2 H_2 + F_1 \cdot A_1 + \dots + F_{71} \cdot A_{71}$$

Prendo le componenti di grado 108 a destra e sinistra

$$(y^3)^{108} = y^0 \cdot H_0^{(107)} + y^1 \cdot H_1^{(107)} + y^2 H_2^{(107)} + \underset{\overline{F}_1}{\underset{\uparrow}{F_1}} \cdot A_1^{(108-t_1)} \underset{\overline{F}_2}{\underset{\uparrow}{+ \dots}}$$

su $\varphi(X)$ vale

$$(y^3)^{108} = y^0 \underset{\uparrow}{H_0^{(107)}} + y^1 \underset{\uparrow}{H_1^{(107)}} + y^2 \cdot \underset{\uparrow}{H_2^{(107)}}$$

polinomio omogeneo di grado 107 in y^0, y^1, y^2, y^3

$\uparrow y^3$ compare al più in grado 107

$$(y^3)^{108} = a_1(y^0, y^1, y^2) \cdot (y^3)^{107} + a_2(y^0, y^1, y^2)(y^3)^{107} + \dots$$

$$+ \; a_{107}(y^0, y^1, y^2)$$

$\Rightarrow$ so X vale

$$(h(x))^{108} = a_1((x^0)^8, (x^1)^8, (x^2)^8) \cdot h(x)^{107} + \cdots$$

$$\Rightarrow \left(\frac{h(x)}{(x^0)^8}\right)^{108} = \frac{a_1((x^0)^8, (x^1)^8, (x^2)^8)\, h(x)^{107}}{(x^0)^{8\cdot 108}} + \cdots$$

$$\uparrow \; (x^0)^8 \cdot (x^0)^{8\cdot 107}$$

$$g^{108} = \frac{a_1((x^0)^8, (x^1)^8, (x^2)^8)}{(x^0)^8} \cdot \left(\frac{h(x)}{(x^0)^8}\right)^{107} + \cdots$$

$$g^{108} = a_1(x^1, x^2)\, g^{107} + a_2 \cdot g^{106} + \cdots$$

$$g = \alpha_1\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) \cdot g \ldots \alpha_2 \cdot g \ldots$$

g è intero su $\mathbb{K}[U_0^{\mathbb{P}^2} \cap \pi_E(X)]$.

Infine $\mathbb{K}[U_0^{\mathbb{P}^2} \cap \pi_E(X)] \xrightarrow{\pi_E^*} \mathbb{K}[U_0^{\mathbb{P}^n} \cap X]$ è iniettiva: se $\pi_E^* \varphi = 0$, allora $\varphi|_{\pi_E(X)} \equiv 0$.

Corollario (Teorema di Noether)

$$X \subseteq \mathbb{P}^n$$

se $X = \mathbb{P}^n$ abbiamo finito

$X \neq \mathbb{P}^n$ $\quad \exists \; x_0 \in \mathbb{P}^n \setminus X$

$$\pi_{x_0} : X \xrightarrow{\text{finita}} X_1 = \pi_0(X) \subseteq \mathbb{P}^{n-1}$$

se $X_1 = \mathbb{P}^{n-1}$ abbiamo finito se $X_1 = \mathbb{P}$ abbiamo finito

altrimenti $X_1 \neq \mathbb{P}^{n-1} \Rightarrow \exists x_1 \in \mathbb{P}^{n-1} \setminus X_1$

$$\pi_{x_1} : X_1 \xrightarrow{\text{finito}} X_2 = \pi_{x_1}(X_1) \subseteq \mathbb{P}^{n-2}$$

se $X_2 = \mathbb{P}^{n-2}$ abbiamo finito ...

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\text{finita}"] \arrow[rrrr, bend right, "\text{finita.}"'] & X_1 \arrow[r, "\text{finita}"] & X_2 \arrow[r] & \dots \arrow[r] & X_k = \mathbb{P}^{n_0} \end{tikzcd}$$