Esercizio: $I \subseteq \mathbb{K}[x,y,z]$

$$I = (xy, yz, zx)$$

Problema: è possibile trovare $f, g \in \mathbb{K}[x,y,z]$ t.c. $I = (f,g)$

I è un modulo per $\mathbb{K}[x,y,z]$

Idea: usare tecnologia dell'algebra lineare

$\mathbb{K}[x,y,z]$ è un dominio $\Rightarrow \mathbb{K}[x,y,z] \subseteq \mathbb{K}(x,y,z)$

$\Rightarrow$ una matrice a coeff in $\mathbb{K}[x,y,z]$ è in particolare una matrice a coeff nel campo $\mathbb{K}(x,y,z) \Rightarrow$ valgono tutti i teoremi che conosciamo per matrici a coeff in un campo.

Supponiamo $\exists\, f, g$ t.c. $(f, g) = (xy, yz, zx)$

$$f = \alpha_1 xy + \alpha_2 yz + \alpha_3 zx \qquad \alpha_i, \beta_j \in \mathbb{K}[x,y,z]$$
$$g = \beta_1 xy + \beta_2 yz + \beta_3 zx$$

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ zx \end{pmatrix}$$

$$xy = a_1 f + a_2 g \qquad a_i, b_j, c_k \in \mathbb{K}[x,y,z]$$
$$yz = b_1 f + b_2 g$$
$$zx = c_1 f + c_2 g$$

$$\begin{pmatrix} xy \\ yz \\ zx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ zx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \overset{A}{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}} \overset{B}{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ zx \end{pmatrix}$$

$$= \underset{M}{\begin{pmatrix} M^1_1 & M^1_2 & M^1_3 \\ M^2_1 & M^2_2 & M^2_3 \\ M^3_1 & M^3_2 & M^3_3 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ zx \end{pmatrix}$$

M è una matrice a coeff in $\mathbb{K}[x,y,z] \subseteq \mathbb{K}(x,y,z)$

$M = AB$; A e B sono matrici a coeff in $\mathbb{K}(x,y,z)$

$\mathrm{rg}(M) \leq 2$

$\leadsto$ $\det M = 0$. $\det M \in \mathbb{K}[x,y,z] \hookrightarrow \mathbb{K}(x,y,z)$

$\det M \in \mathbb{K}(x,y,z)$ ovvero $\det M$ è il polinomio nullo.

In particolare $(\det M)_{(0,0,0)} = 0$

$$\begin{pmatrix} xy \\ yz \\ zx \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ zx \end{pmatrix}$$

equivalentemente

$$\underbrace{(M - \mathrm{Id})}_{L} \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ zx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

; L è una matrice a coeff in $\mathbb{K}[x,y,z]$

$$\begin{pmatrix} L^1_1 & L^1_2 & L^1_3 \\ L^2_1 & L^2_2 & L^2_3 \\ L^3_1 & L^3_2 & L^3_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ zx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$L^1_1\, xy + L^1_2\, yz + L^1_3\, zx \equiv 0$$

$$L^1_1\, xy = z\left(-L^1_2\, y - L^1_3\, x\right) \Rightarrow z \mid L^1_1$$

Analogamente $z \mid L^2_1$ e $z \mid L^3_1$

Inoltre $L^1_2\, yz = x(-L^1_1\, y - L^1_3\, z) \Rightarrow x \mid L^1_2$ e analogamente

$x \mid L^2_2$, $x \mid L^3_2$

Allo stesso modo $y \mid L^1_3, L^2_3, L^3_3$

$$L = \begin{pmatrix} z\lambda^1_1 & x\lambda^1_2 & y\lambda^1_3 \\ z\lambda^2_1 & x\lambda^2_2 & y\lambda^2_3 \\ z\lambda^3_1 & x\lambda^3_2 & y\lambda^3_3 \end{pmatrix} \leftarrow L(0,0,0) = 0 \qquad \lambda^i_j \in \mathbb{K}[x,y,z]$$

$$\Rightarrow \quad M = L + Id = \begin{pmatrix} z\lambda^1_1 + 1 & x\lambda^1_2 & y\lambda^1_3 \\ z\lambda^2_1 & x\lambda^1_2 + 1 & y\lambda^2_3 \\ z\lambda^3_1 & x\lambda^3_2 & y\lambda^3_3 + 1 \end{pmatrix}$$

$$M(0,0,0) = Id \quad \left(= L(0,0,0) + Id \right)$$

$$\Rightarrow \quad \det\left(M(0,0,0) \right) = \det Id = 1$$

$$\parallel$$

$$(\det M)(0,0,0) = 0$$

$$|||$$

$\Rightarrow$ non possono esistere f, g t.c. ...

$\ddot{0}$

Scoppiamenti

Consideriamo $\mathbb{A}^n$ con coordinate $(t^0, \dots t^{n-1})$

$\mathbb{P}^{n-1}$ $[t^0 : \dots : t^{n-1}]$

Dentro $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ consideriamo la varietà d'incidenza $Z = \{(v, \ell) : v \in \ell\}$

$$= \left\{ \left((t^0, \dots t^{n-1}), [x^0 : x^1 \dots x^{n-1}] \right) \text{ t.c. } \operatorname{rg}\begin{pmatrix} t^0 & t^1 & \dots & t^{n-1} \\ x^0 & x^1 & \dots & x^{n-1} \end{pmatrix} \leq 1 \right\}$$

$$= \left\{ \dots \quad \begin{cases} t^0 x^1 - t^1 x^0 = 0 \\ \dots \end{cases} \right\}$$

$($

$$= \{ \dots \quad \{ t^i x^j - t^j x^i = 0 \}$$

Z è una varietà algebrica (chiusa in $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$)

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"] & \mathbb{P}^{n-1} \\
& \mathbb{A}^n &
\end{tikzcd}$$

$\pi : Z \longrightarrow \mathbb{A}^n$ è la restrizione a Z della proiezione sul primo fattore.

π è regolare

se $v \in \mathbb{A}^n$, $v \neq \vec{0}$, $\pi^{-1}(v) = \{ (w, l) : w \in l, w = v \}$

$$= \{ (v, \ell) : \ell \ni v \}$$

$$\cong \{ \ell \in \mathbb{P}^{n-1} : \ell \ni v \}$$

$$= \{ [v] \}$$

Se $v = \vec{0}$ $\quad \pi^{-1}(v) = \{ \ell \in \mathbb{P}^{n-1} : 0 \in \ell \} = \mathbb{P}^{n-1}$

Notazione. Scriviamo $\widetilde{\mathbb{A}}^n$ per Z. Chiamiamo

$\pi : \widetilde{\mathbb{A}}^n \to \mathbb{A}^n$ lo scoppiamento di $\mathbb{A}^n$ in 0.

$$\pi\big|_{\widetilde{\mathbb{A}}^n \setminus \pi^{-1}(0)} : \widetilde{\mathbb{A}}^n \setminus \pi^{-1}(0) \longrightarrow \mathbb{A}^n \setminus \{0\}$$ è biiettiva.

In effetti: $\pi\big|_{\tilde{\mathbb{A}}^n \setminus \pi^{-1}(0)}$ è un isomorfismo!

Esibiamo $\varphi : \mathbb{A}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \tilde{\mathbb{A}}^n \setminus \pi^{-1}(0)$ t.c.

$$\pi \circ \varphi = id_{\mathbb{A}^n \setminus \{0\}} \quad ; \quad \varphi \circ \pi = id_{\tilde{\mathbb{A}}^n \setminus \pi^{-1}(0)}.$$

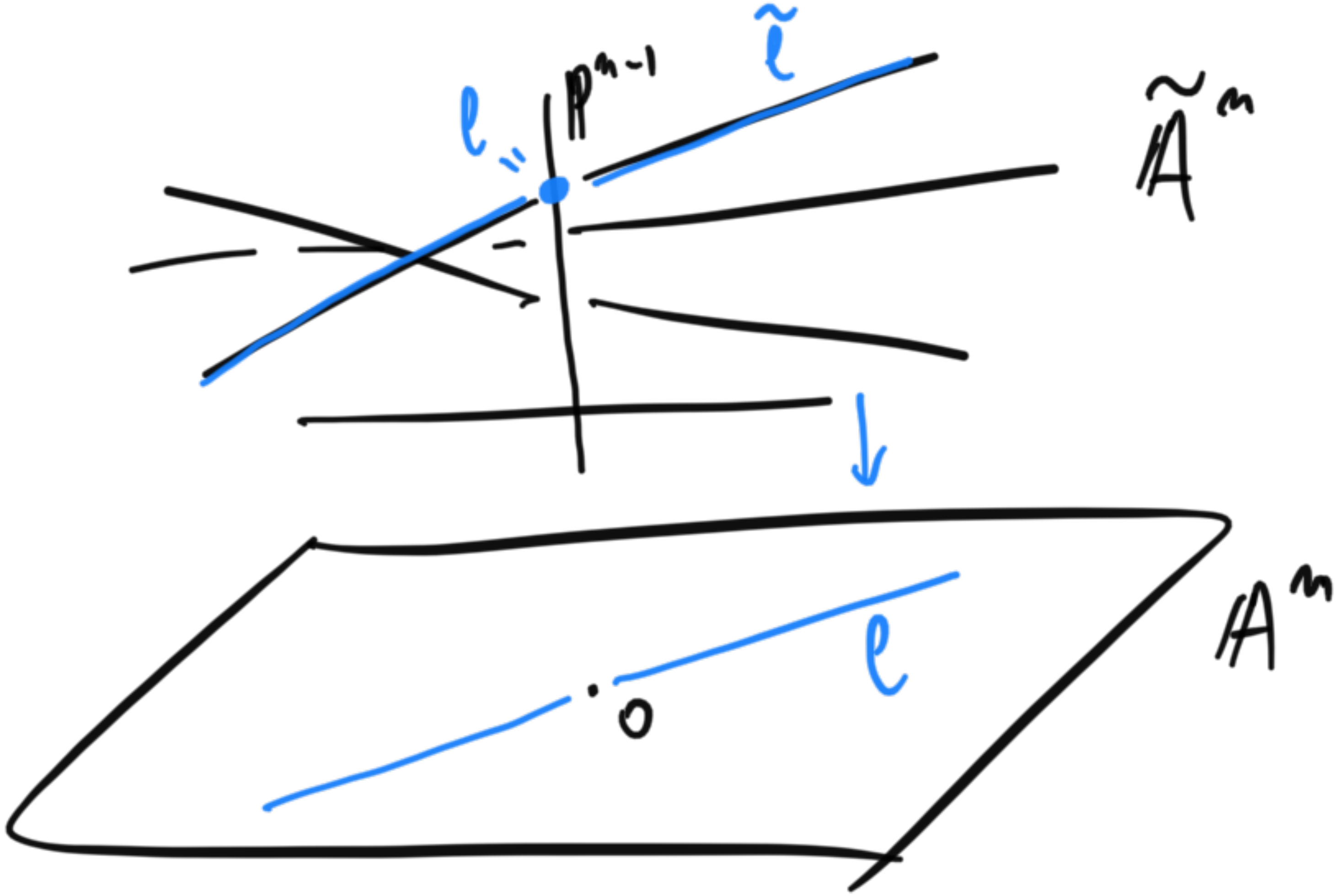
$$\varphi : v \longmapsto (v, [v])$$

(sto definendo $\varphi : \mathbb{A}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ in modo tale che l'immagine di φ sia contenuta in $\tilde{\mathbb{A}}^n$)

$$(\pi \circ \varphi)(v) = \pi(v, [v]) = v$$

$$(\varphi \circ \pi)(w, l) = \varphi(w) = (w, [w]) = (w, l)$$

$w \in \ell \Rightarrow (w) = \ell$



Se $p \in \tilde{\mathbb{A}}^n$, $p \notin \pi^{-1}(0) \Rightarrow p$ è un punto liscio per $\tilde{\mathbb{A}}^n$. Infatti $\tilde{\mathbb{A}}^n \setminus \pi^{-1}(0) \cong \mathbb{A}^n \setminus \{0\}$ che è una varietà liscia.

Se $p \in \pi^{-1}(0)$? Scegliamo una carta affine attorno a p.

$\downarrow$

$$p = (\vec{0}, \ell) = \left((0, \dots 0), [x^0 : \dots x^{n-1}] \right)$$

$\mathbb{P}^{n-1} \to$ almeno uno degli x^i è $\neq 0$.

Supponiamo $x^0 \neq 0$. Sia $\xi^i = \dfrac{x^i}{x^0}$

$$p = \left((0, \dots 0), [1 : \xi^1 \dots \xi^{n-1}] \right)$$

Le equazioni che definiscono $\widetilde{\mathbb{A}}^n$ sono

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} t^0 & \dots & t^{n-1} \\ x^0 & \dots & x^{n-1} \end{pmatrix} \leq 1$$

Su tutto l'aperto $\{ (v, \ell) : x^0(\ell) \neq 0 \} \subseteq \widetilde{\mathbb{A}}^n$

$\Downarrow$ p

Le equazioni che definiscono $\widetilde{\mathbb{A}}^n$ sono

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} t^0 & \cdots & t^{n-1} \\ 1 & \xi^1 \cdots & \xi^{n-1}\end{pmatrix} \leq 1$$

$$\Updownarrow$$

$$t^1 = \xi^1 t^0 \;;\; t^2 = \xi^2 t^0 \;\cdots\; t^{n-1} = \xi^{n-1} t^0$$

$\Rightarrow$ I punti di $\tilde{\mathbb{A}}^n$ nell'intorno di p dato da $x^q(\ell) \neq 0$

sono $(t^0, \xi^1 \cdots \xi^{n-1}) \longleftrightarrow (t^0, t^0\xi^1 \cdots t^0\xi^{n-1})$

questo definisce una copia di $\mathbb{A}^n$

Quindi non solo nei punti in $\tilde{\mathbb{A}}^n \setminus \pi^{-1}(0)$

lo spazio $\tilde{\mathbb{A}}^n$ è localmente isomorfo ad $\mathbb{A}^n$, ma anche nei punti di $\pi^{-1}(0)$.

$\to$ $\widetilde{\mathbb{A}}^n$ è una varietà liscia di dimensione n.

Altra domanda: $\widetilde{\mathbb{A}}^n$ è irriducibile?

$$\widetilde{\mathbb{A}}^n = \underset{\mathbb{P}^{n-1}}{\underset{\cong}{\pi^{-1}(0)}} \cup \pi^{-1}(\mathbb{A}^n\setminus\{0\}) = \pi^{-1}(0)\cup \underset{\overline{\widetilde{\mathbb{A}}^n\setminus\pi^{-1}(0)}}{\underset{\cap}{\left(\widetilde{\mathbb{A}}^n\setminus\pi^{-1}(0)\right)}}$$

$$\Rightarrow \widetilde{\mathbb{A}}^n = \pi^{-1}(0) \cup \overline{\widetilde{\mathbb{A}}^n\setminus\pi^{-1}(0)}$$

chiuso irriducibile ($\cong \mathbb{P}^{n-1}$) di dim $n-1$

chiuso irriducibile (è la chiusura di $\widetilde{\mathbb{A}}^n\setminus\pi^{-1}(0) \cong \mathbb{A}^n\setminus\{0\}$ irriducibile) dim n

Poiché $\tilde{\mathbb{A}}^n$ è liscia, ogni punto di $\tilde{\mathbb{A}}^n$ può appartenere al più a una componente irriducibile.

Sia $Y_0 \supseteq \pi^{-1}(0)$ una componente irriducibile di $\tilde{\mathbb{A}}^n$ contenente $\pi^{-1}(0)$, e sia $Y_1 \supseteq \overline{\tilde{\mathbb{A}}^n \setminus \pi^{-1}(0)}$ ...

$\Rightarrow$ $Y_0 \cap Y_1 = \emptyset$, oppure $Y_0 = Y_1$

$\Downarrow$

$$\pi^{-1}(0) \cap \overline{\tilde{\mathbb{A}}^n \setminus \pi^{-1}(0)} = \emptyset$$

Se dimostro $\pi^{-1}(0) \cap \overline{\tilde{\mathbb{A}}^n \setminus \pi^{-1}(0)} \neq \emptyset \Rightarrow Y_0 = Y_1$

Osservo che $Y_1 \subseteq \tilde{\mathbb{A}}^n$; $\overline{\tilde{\mathbb{A}}^n \setminus \pi^{-1}(0)} \subseteq Y_1$

$$\uparrow \qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow$$

$\dim Y_1 \leq n$ $\qquad\qquad$ $\dim Y_1 \geq n$

$\Rightarrow \dim Y_1 = n$

$$\underbrace{\overline{\tilde{\mathbb{A}}^n \setminus \pi^{-1}(0)}}_{\dim n} \subseteq \underbrace{Y_1}_{\dim n \text{ irriducibile}} \Rightarrow Y_1 = \overline{\tilde{\mathbb{A}}^n \setminus \pi^{-1}(0)}$$

$$\Rightarrow \pi^{-1}(0) \subseteq Y_0 = Y_1 = \overline{\tilde{\mathbb{A}}^n \setminus \pi^{-1}(0)} \Rightarrow \pi^{-1}(0) \subseteq \overline{\tilde{\mathbb{A}}^n \setminus \pi^{-1}(0)}$$

$$\Rightarrow \tilde{\mathbb{A}}^n = \overline{\underbrace{\tilde{\mathbb{A}}^n \setminus \pi^{-1}(0)}_{\text{irriducibile}}}$$ e quindi è irriducibile.

Mostriamo ora che $\overline{\hat{\mathbb{A}}^n \setminus \pi^{-1}(0)} \cap \underbrace{\mathbb{P}^{n-1}}_{= \pi^{-1}(0)} \neq \emptyset$.

Sia ℓ una retta per O in $\mathbb{A}^n$.

$$\ell \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{A}^n \setminus \{0\}$$

$$\varphi(\ell \setminus \{0\}) \subseteq \widetilde{\mathbb{A}}^n \setminus \pi^{-1}(0)$$

$$\Rightarrow \overline{\varphi(\ell \setminus \{0\})} \subseteq \overline{\widetilde{\mathbb{A}}^n \setminus \pi^{-1}(0)}$$

Sia $v \neq \vec{0}$, $v \in \ell \Rightarrow \ell \setminus \{0\} = \lambda \vec{v}$, $\lambda \neq 0$

$$\varphi(\ell \setminus \{0\}) = \varphi(\lambda \vec{v}) = (\lambda \vec{v}, [\lambda \vec{v}])_{\lambda \neq 0} = (\lambda \vec{v}, [v])_{\lambda \neq 0}$$

$$\overline{\varphi(\ell \setminus \{0\})} = (\lambda \vec{v}, [v])_{\forall \lambda \in \mathbb{K}}$$

$$\overline{\varphi(\ell \setminus \{0\})} \cap \underset{\substack{\| \\ \mathbb{P}^{n-1}}}{\pi^{-1}(0)} = (0,[v]) \cong \{\ell\}$$

$\mathbb{A}^n \subseteq \mathbb{P}^n$ coordinate $[t^0 : t^1 \dots t^n]$

$t^n \neq 0$

$$(t^0, \dots t^{n-1}) \longmapsto [t^0 : t^1 \dots : t^{n-1} : 1]$$

$$\tilde{\mathbb{A}}^n \subseteq \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \qquad rg\begin{pmatrix} t^0 & \dots & t^{n-1} \\ x^0 & \dots & x^{n-1} \end{pmatrix} \leq 1$$

scoppiamento di $\mathbb{A}^n$ nel punto $(0, \dots 0)$

$$\left\{ t^i x^j - t^j x^i = 0 \right.$$

definisce

$(0, \dots 0) \longmapsto [0:0 \dots :0:1]$ un chiuso in $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$

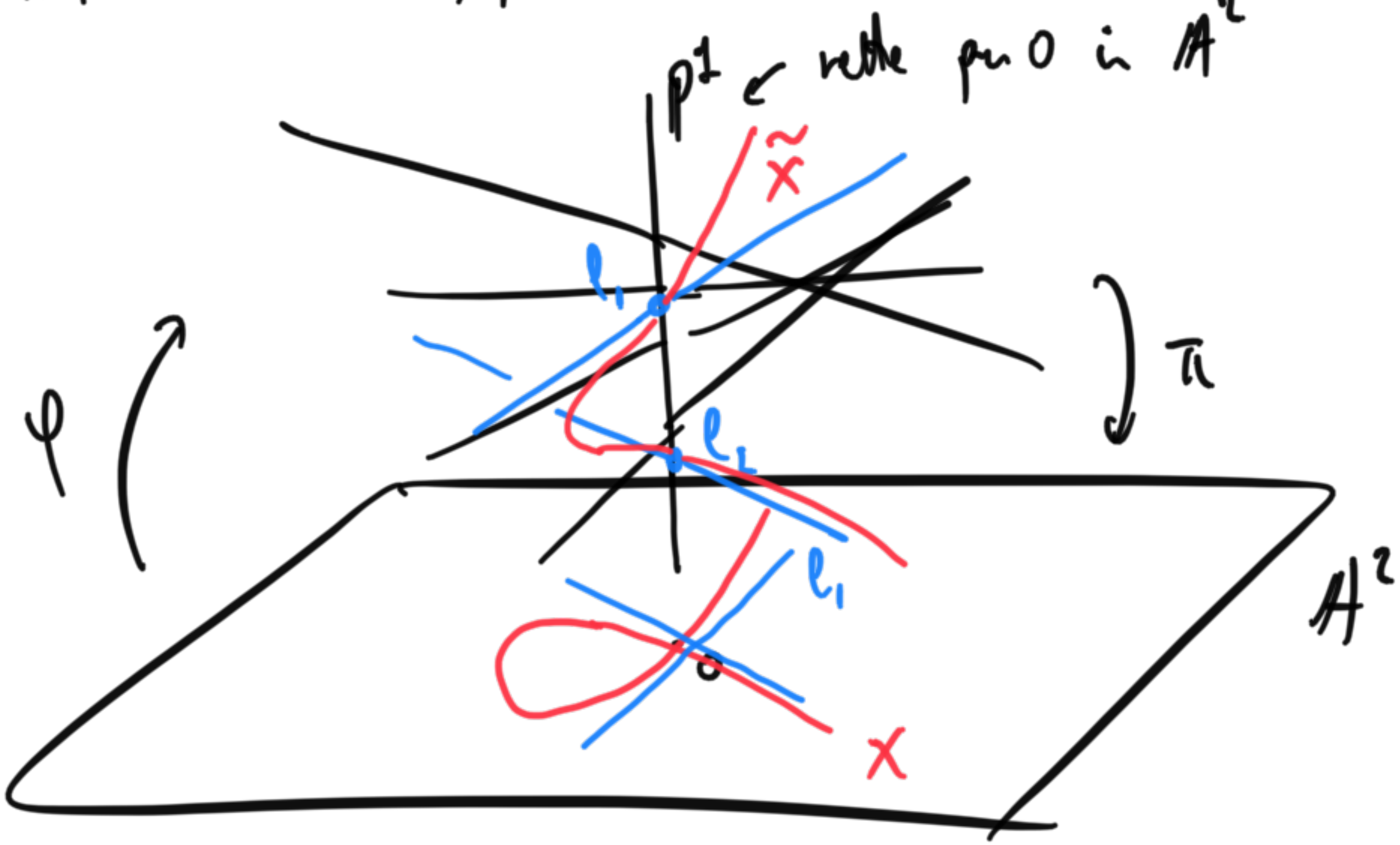
Questo chiuso lo chiamo lo scoppiamento di $\mathbb{P}^n$ in $[0:0 \dots 0:1]$ e lo indico con $\pi: \widetilde{\mathbb{P}}^n \to \mathbb{P}^n$

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathbb{A}}^n \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi"'] & \widetilde{\mathbb{P}}^n \arrow[d, "\pi"] \\
\mathbb{A}^n \arrow[r, hook] & \mathbb{P}^n
\end{tikzcd}$$

ovvero $\pi: \widetilde{\mathbb{A}}^n \to \mathbb{A}^n$ è una descrizione locale di $\widetilde{\mathbb{P}}^n \to \mathbb{P}^n$. Da quello che abbiamo detto prima $\widetilde{\mathbb{P}}^n$ è liscia irriducibile di dim n,

$$\pi\Big|_{\tilde{\mathbb{P}}^n \setminus \pi^{-1}[0:\dots 0:1]} : \tilde{\mathbb{P}}^n \setminus \pi^{-1}[0:0\dots 0:1] \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^n \setminus \{[0\dots 0:1]\}$$

Es: $\tilde{\mathbb{A}}^2 \longrightarrow \mathbb{A}^2$



$$\overline{\varphi(X\setminus\{0\})} = \tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$$

$\tilde{X}$ è una curva liscia!

$\pi|_{\tilde{X} \setminus (\pi^{-1}(0))} \quad \tilde{X} \setminus \pi^{-1}(0) \longrightarrow X \setminus \{0\}$ è un isomorfismo.

$\Rightarrow \quad \tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$ è una trasformazione che è un isomorf. birazionale regolare, che desingolarizza X.

Se la singolarità sotto è peggiore $\tilde{X}$ potrebbe ancora essere singolare

ma "un po' meno singolare". Allora facendo degli scoppiamenti di $\tilde{X}$ nei suoi punti singolari ottengo

$$\tilde{\tilde{X}} \longrightarrow \tilde{X} \longrightarrow X$$

con $\tilde{\tilde{X}}$ ancora meno singolare.

Dopo un numero finito di passi trovo

$$\tilde{\tilde{\tilde{\tilde{\tilde{X}}}}} \longrightarrow X$$

isomorfismo birazionale regolare (successione di scoppiamenti) con X' liscia.

Teorema di risoluzione delle singolarità (Heisuke Hironaka): X varietà q. proiett su $\mathbb{k}$ di caratteristica $0 \Rightarrow \exists$ una successione di scoppianti che desingolarizza X.