$X \subseteq \mathbb{A}^n$ $\quad X$ irriducibile

$\dim X = n-1 \quad (\operatorname{codim} X = 1)$

$\Rightarrow \quad X = V(f) \quad f$ irriducibile

$X \subseteq \mathbb{A}^n \quad X = \bigcup X_i \quad X_i$ irriducibil

$\dim X_i = n-1 \quad \Rightarrow \quad X = V(f) \quad (f = f_1 \cdots f_k)$

$X_i = V(f_i)$

Più in generale

$X \subseteq \mathbb{P}^{n_1} \times \mathbb{P}^{n_2} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_k}$

X irriducibile codim $X = 1$ $(\dim X = \sum n_i - 1)$

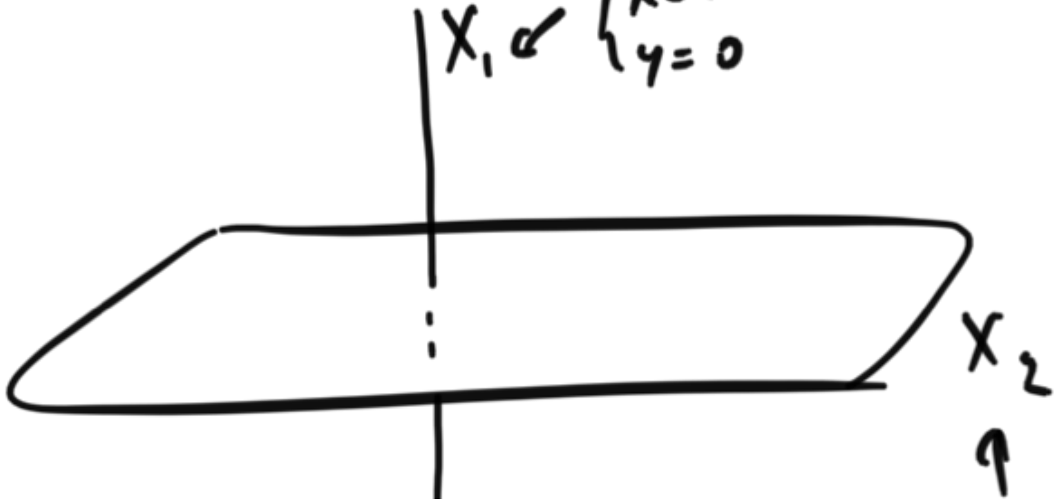
$\Rightarrow X = V(f)$ f omogeneo nei vari gruppi di variabili $[\underbrace{x^0 : \dots x^{n_1}}_{\mathbb{P}^{n_1}} : \underbrace{y^0 : \dots y^{n_2}}_{\mathbb{P}^{n_2}} \dots]$

$U \subseteq X$ U aperto ; X irriducibile

$\dim U = \dim X$

Se X non è irriducibile questo non è necessariamente vero

Es: X



$X \subseteq \mathbb{A}^3$

$$\begin{cases} xz = 0 \\ yz = 0 \end{cases}$$

$z=0$

$U = X' \setminus \{(0,0,0)\}$ è aperto in X $\qquad$ $\dim U = 1$

$\qquad\quad \|$

$\qquad X \cap \{z \neq 0\}$ $\qquad\qquad$ $\dim X = 2$

In $\mathbb{P}^N$ siano E_1 una retta proiettiva

$E_1 \subseteq \mathbb{P}^N$ sottospazio proiettivo di dim 1

$E_{N-1} \subseteq \mathbb{P}^N$ iperpiano proiettivo (sottospazio proiettivo di dim $N-1$)

Se $E_1 \nsubseteq E_{N-1} \Longrightarrow E_1 \cap E_{N-1} = \{p\}$

In particolare $E_1 \cap E_{N1} \neq \emptyset$

Se $E_1 \subseteq E_{N-1} \Rightarrow E_1 \cap E_{N-1} = E_1$

In tutti i casi $\dim(E_1 \cap E_{N-1}) \geqslant 0$ $\left(\Rightarrow E_1 \cap E_{N-1} \neq \emptyset \right)$

(notazione : $\dim \emptyset = -1$)

Più in generale, se $E_m \subseteq \mathbb{P}^N$ è un sottospazio proiettivo di dim m, ed $E_{N-m} \subseteq \mathbb{P}^N$ è un sottosp. proiett. di dim $N-m$ $\Rightarrow \dim(E_m \cap E_{N-m}) \geqslant 0$

Ancora più in generale, se $E_m, E_n \subseteq \mathbb{P}^N$ sono sottospazi proiettivi $\Rightarrow \dim(E_m \cap E_n) \geqslant m+n-N$

Quello che vogliamo dimostrare è la seguente vasta generalizzazione:

se $X, Y \subseteq \mathbb{P}^N$ sono varietà proiettive, con $\dim X = m$, $\dim Y = n$. Allora ogni componente irriducibile Z di $X \cap Y$ ha dimensione $\dim(Z) \geq m+n-N$. In particolare, se $n+m \geq N \Rightarrow X \cap Y \neq \emptyset$.

Torniamo al caso lineare.

$E_1 \subseteq \mathbb{P}^N$ sottospazio di dim 1

$E_{N-1} \subseteq \mathbb{P}^N$ iperpiano. E_{N-1} è definito come il luogo degli zeri di un certo polinomio omogeneo

F di grado 1.

$$E_1 \cap E_{N-1} = E_1 \cap \{F=0\}$$

Prima generalizzazione: $X \subseteq \mathbb{P}^N$ sottovarietà proiettiva irriduc

$\dim X = 1$. F polinomio omogeneo di grado 1.

$$X_F := X \cap \{F=0\}$$

Due possibilità: i) $F|_X \equiv 0 \Rightarrow X_F = X$

$$X \subseteq \{F=0\}$$

$X_F \neq \emptyset$ $\quad \dim X_F = 1$

ii) $F|_X \not\equiv 0$.

X_F è una varietà proiettiva $X_F \leq X$

X è irriducibile, $\dim X_F = \dim X \Rightarrow X_F = X$

$\Rightarrow F|_X \equiv 0$ contro l'ipotesi.

$\Rightarrow \dim X_F < \underset{\substack{\shortparallel \\ 1}}{\dim X} \Rightarrow \dim X_F = 0$ oppure

$X_F = \emptyset$ e $\dim X_F = -1$

In ogni caso X_F consiste al più in un numero finito di punti. Allora esiste un polinomio omogeneo di grado 1, F_1, che non si annulla su nessuno di questi punti: (dato un insieme finito di punti esiste un iperpiano che non ne contiene nessuno).

$\underset{\overset{\shortparallel}{F}}{[F_0 : F_1]}$ è una coppia di polinomi omogenei di primo grado.

$$\forall x \in X , \quad \big(F_0(x), F_1(x)\big) \neq (0,0)$$

Se $\big(F_0(x), F_1(x)\big) = (0,0) \Rightarrow F_0(x) = 0 \Rightarrow x \in X_F$

$\Rightarrow F_1$ si annulla in uno dei punti di X_F

contro l'ipotesi.

$$\phi : [F_0 : F_1] : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

$\phi : X \longrightarrow \phi(X)$ è finita (in generale, se $F_0 : F_1 : \dots F_m$ sono omogenee di grado d, senza zeri comuni su $X \Rightarrow \underbrace{[F_0 : \dots F_m]}_{\phi} : X \to \mathbb{P}^n$ è regolare e $\phi : X \to \phi(X)$ è finita)

$$\Rightarrow \dim \phi(X) = \dim X = 1$$

ϕ finita $\Rightarrow$ $\phi(X)$ è chiuso in $\mathbb{P}^1$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{chiuso} \\ \text{dim } 1}}{\phi(X)} \subseteq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{irriducibile} \\ \text{dim } 1}}{\mathbb{P}^1} \qquad \Rightarrow \qquad \phi(X) = \mathbb{P}^1$$

In particolare esisterà $x_0 \in X$: $\phi(x_0) = [0:1]$

$\Rightarrow F(x_0) = 0 \Rightarrow x_0 \in X_F \Rightarrow X_F \neq \emptyset$.

Immediata generalizzazione:

$X \in \mathbb{P}^N$ irr. dim $X = 1$; F polinomio omogeneo di grado $d \geq 1$. Allora

$X_F = X \cap \{F = 0\}$ è non vuoto e

dim $X_F \geq 0$

Come nel caso precedente, $\exists$ L polinomio omogeneo di grado 1, che non ha zeri su X_F

$F_1 = L^d$ è un polinomio omogeneo di grado d

che non ha zeri su X_F.

$$\phi : [\underset{\underset{F}{\shortparallel}}{F_0} : F_1] : X \longrightarrow \mathbb{P}^1 \quad \dots \text{(come prima)}$$

Seconda generalizzazione

$\dim X = 2$, X irr. $X \subseteq \mathbb{P}^N$ X proiettiva.

F polinomio omogeneo di grado d

$X_F = X \cap \{F=0\}$

Voglio dimostrare $\dim X_F \geq 1 = \dim X - 1$.

Vogliamo dimostrare $\dim X_F \geq 1 = \dim X - 1$

Sia $X_0 = X$; $X_1 = X_F$

$\dim X_1 \leq \dim X_0 = \dim X$

$X_1 = \bigcup X_{1;i}$ $X_{1;i}$ irriducibili

$X_{1;i} \subseteq X_0$

↖ irriducibile

Se $\dim X_{1;i} = \dim X_0 \Rightarrow \underset{\underset{X_1}{\cap}}{X_{1;i}} = X_0 \Rightarrow X_1 = X_0$

$\Rightarrow F|_X \equiv 0 \Rightarrow X_F = X \Rightarrow \dim X_F = 2.$

Altrimenti $\dim X_{1;i} < \dim X_0$ per ogni componente irriducibile di X_1

$$\Rightarrow \quad \dim X_1 < \dim X_0$$

Scelgo un punto x_i in ogni componente irriducibile $X_{1;i}$ e F_1 con grado F_1 = grado F, omogeneo che non si annulla su nessuno dei punti x_i

$$X_2 = X_1 \cap \{F_1 = 0\} = X \cap \left\{ \begin{matrix} \overset{\overset{F}{\swarrow}}{F_0} = 0 \\ F_1 = 0 \end{matrix} \right\}$$

$$X_2 = X_{2;j} \leftarrow \text{irriducibile} \qquad \left\{ \; X_{2;j} = \bigcup (X_{2;j} \cap X_{1;i}) \right.$$

$\dim X_{2;j} \le \dim \underset{\bigcup X_{1;i}}{\underset{\|}{X_1}}$ / $\Rightarrow \exists\, i$ t.c. $X_{2;j} \le X_{1;i}$

$X_{2,j} \le X_{1;i}$

se $\dim X_{2;j} = \dim X_{1;i} \Rightarrow X_{2;j} = X_{1;i}$

$X_{2;j} \le X_2 \Rightarrow F_2\big|_{X_{2;j}} \equiv 0 \Rightarrow F_2\big|_{X_{1;i}} \equiv 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow F_1(x_i) = 0$ contro l'ipotesi.

$\Rightarrow \dim X_{2;j} < \dim X_{1;i}$

1

$$\Rightarrow \quad \dim X_2 < \dim X_1 < \dim X_0$$

Sia ora F_2 che non si annulla su X_2

($\dim X_2 \le 0 \rightarrow X_2$ è un insieme finito di punti

oppure $X_2 = \emptyset$)

$$\phi := [F_0 : F_1 : F_2] : X \longrightarrow \mathbb{P}^2 \quad \text{è regolare}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{dim } 2}}{X} \xrightarrow{\phi} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dim } 2}}{\phi(X)} \ \text{è finita} \quad ; \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{chiuso} \\ \text{dim } 2}}{\phi(X)} \subseteq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{irriduc} \\ \text{dim } 2}}{\mathbb{P}^2}$$

$$\Rightarrow \phi(X) = \mathbb{P}^2 \Rightarrow \exists\, \xi \in X : \phi(\xi) = [0:0:1]$$

$$\Rightarrow F(\xi) = 0 \Rightarrow \xi \in X_F \Rightarrow X_F \neq \emptyset .$$

Vale di più: $\dim X_F \geq 1$.

Infatti se $\dim \underset{X_1}{\underset{\shortparallel}{X_F}} < 1 \Rightarrow \dim X_2 < 0 \Rightarrow X_2 = \emptyset$

$X_2 = \emptyset \Rightarrow F_1$ non ha zeri su X_1!

(F_0, F_1) non ha zeri comuni su $X_0 = X$.

Ma $(F_0, F_1)(\xi) = (0,0)$ $\quad \Big([F_0, F_1, F_2](\xi) = [0:0:1] \Big)$

Abbiamo un assurdo che deriva da $\dim X_1 < 1$

Quindi $\dim X_1 \geq 1$.

In generale: $X \subseteq \mathbb{P}^N$ proiettiva

F polinomio omogeneo di grado d

$X_F := X \cap \{F=0\}$

$\Rightarrow \dim X_F \geq \dim X - 1$

Più in generale ancora: se $F_1, \dots F_m$ sono

polinomi omogenei di gradi $d_1 \dots d_m$.

$$\dim X_{F_1 \dots F_m} = \dim\left(X \cap \left\{\begin{matrix} F_1 = 0 \\ \vdots \\ F_m = 0 \end{matrix}\right\}\right) \geqslant \dim X - m$$

In particolare, se $m \leq \dim X \Rightarrow X \cap \left\{\begin{matrix} F_1 = 0 \\ \vdots \\ F_m = 0 \end{matrix}\right\} \neq \emptyset.$

Corollari - Se $X \subseteq \mathbb{P}^N$ $\dim X = n$

$\Rightarrow \exists\ Y \subseteq X$ sottovarietà proiettiva

di dimensione d, $\forall d$ con $0 \leq d \leq n$

Questo permette di definire induttivamente la dimensione di una varietà proiettiva irriducibile come.

- $\dim \emptyset = -1$
- $\dim X = \left(\sup\{\dim Y\}\right) + 1$ con Y sottovarietà propria di X

Corollario : se $X \subseteq \mathbb{P}^N$ proiettiva, $\dim X = n$,

Allora $\forall E_d$ sottospazio lineare con $\dim E_d = d \geq N-n$

$E_d \cap X \neq \emptyset$

Infatti se $\dim E_d \geq N-n \Rightarrow E_d$ è il luogo

di zeri di $F_1 \dots F_k$ con F_i lineari $k \leq n$

equazioni su X

$\Rightarrow \exists$ uno zero di questa equazione

Questo si può dire come: $X \subseteq \mathbb{P}^N$

$$\dim X = N - d_{max} - 1$$

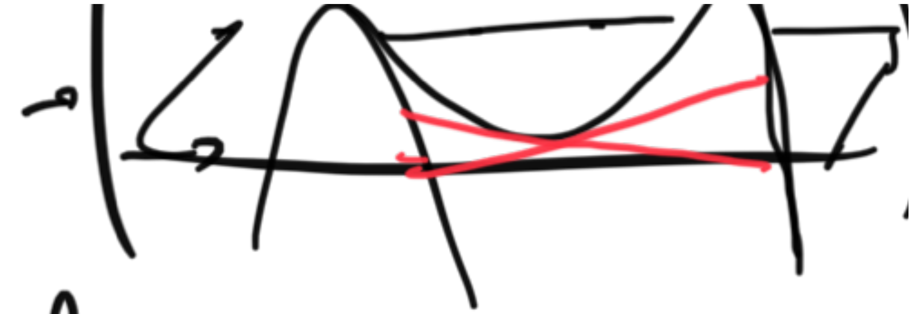
con d_{max} massima dimensione di un sottospazio lineare E di $\mathbb{P}^N$ con $X \cap E = \emptyset$.

Abbiamo dimostrato fin qui che $X \subseteq \mathbb{P}^N$ proiettiva $\dim X = n$, se $F|_X \not\equiv 0 \Rightarrow \dim X_F = \dim X - 1$.

Supponiamo X irriducibile.

$F(x,y,z) = z$ $\quad F=0 \Leftrightarrow z=0$

Questo non implica X_F irriducibile!



quindi quello che sappiamo è solo che

$$\max \dim X_{F;i} = \dim X - 1$$

Vale di più! <u>Ogni</u> componente irriducibile di X_F ha dimensione $\dim X - 1$

<u>Corollario</u>: X quasi-proiettiva irriducibile (X è un aperto in $\overline{X} \subseteq \mathbb{P}^N$). Se F è un polinomio omogeneo in $[x^0: \dots x^N]$, e $F|_X \neq 0$.

Se $X_F \neq \emptyset$, tutte le componenti irriducibili di X_F hanno dim. uguale a $\dim X - 1$.

dim:
$$X_F = X \cap \{F=0\} = X \cap \overline{X} \cap \{F=0\}$$
$$= X \cap (\overline{X})_F$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{X} \text{ è una varietà proiettiva} \\ X \text{ irriducibile} \Rightarrow \overline{X} \text{ irriducibile} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{tutte le componenti} \\ \text{irriduc. di } (\overline{X})_F \text{ hanno} \\ \dim = \dim \overline{X} - 1 \end{array}$$

X è aperto in $\overline{X} \Rightarrow \dim \overline{X} = \dim X$

$\Rightarrow$ le componenti irriducibili Y_i di $(\overline{X})_F$ hanno dimensione $\dim X - 1$.

$$X_F = X \cap (\overline{X})_F = X \cap (Y_1 \cup \dots Y_k) = \underbrace{(X \cap Y_1)}_{\text{aperto in } Y_1} \cup \dots \cup \underbrace{(X \cap Y_k)}_{\text{aperto in } Y_k}$$

Y_i irriducibili $\Rightarrow \begin{cases} X \cap Y_i = \emptyset \\ \quad \text{oppure} \\ X \cap Y_i \text{ è denso in } Y_i \xRightarrow[Y_i \text{ irriduc}]{} X \cap Y_i \text{ è irriducibile} \end{cases}$

$\Rightarrow$ le componenti irriducibili di X_F sono $X \cap Y_i$

quali $X \cap Y_i \neq \emptyset$.

Se $X \cap Y_i \neq \emptyset \Rightarrow X \cap Y_i$ è un aperto non vuoto di

$Y_i \Rightarrow \dim X \cap Y_i = \dim Y_i = \dim X - 1$

Oss: essendo nel caso quasi-proiettivo non possiamo escludere $X_F = \emptyset$.

Es: $X = \{z \neq 0\}$ in $\mathbb{P}^2 \nwarrow [x:y:z]$

$$F(x:y:z) = z$$

Teorema: $X, Y \subseteq \mathbb{P}^N$ quasi proiettive irriducibili $\dim X = m$, $\dim Y = n$. Se $X \cap Y \neq \emptyset$, per ogni componente irriducibile Z di $X \cap Y$ vale $\dim Z \geq m+n-N$. Inoltre, se X e Y sono proiettive e $m+n-N \geq 0$

$\Rightarrow X \cap Y \neq \emptyset.$

dim: Abbiamo dimostrato che data una varietà quasi proiett, imponendo una sola equazione (omogenea) otteniamo il vuoto oppure componenti irriducibili tutte di dimensione almeno 1 di meno rispetto alla varietà di partenza.

Induttivamente, se imponiamo K equazioni omogenee otteniamo il vuoto oppure componenti irriducibili di dimensione almeno K meno rispetto alla dim di partenza.

Veniamo al nostro caso. Non è restrittivo supporre

X, Y affini $\qquad X, Y \subseteq \mathbb{A}^N$

$$\begin{tikzcd}
X \cap Y \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathbb{A}^N \arrow[d, "\mathrm{diag}"] \\
X \times Y \arrow[r] & \mathbb{A}^N \times \mathbb{A}^N
\end{tikzcd}$$

$$X \cap Y \cong X \times Y \cap \mathrm{diag}_{\mathbb{A}^N \times \mathbb{A}^N}$$

↑ varietà q. proiett irriducib di dimensione $m+n$

$$\begin{cases} x^1 = y^1 \\ x^2 = y^2 \\ \vdots \\ x^N = y^N \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x^1 - y^1 = 0 \\ x^2 - y^2 = 0 \\ \vdots \\ x^N - y^N = 0 \end{cases}$$

↑ N equazioni omogenee

Se X e Y sono proiettive

→ X e Y sono luogo di zeri di polinomi omogenei nelle variabili $(x^0 \dots x^N)$.

Posso pensare a questi polinomi come elementi di $\mathbb{K}[x^0, \dots x^N]$ → definiscono delle varietà affini

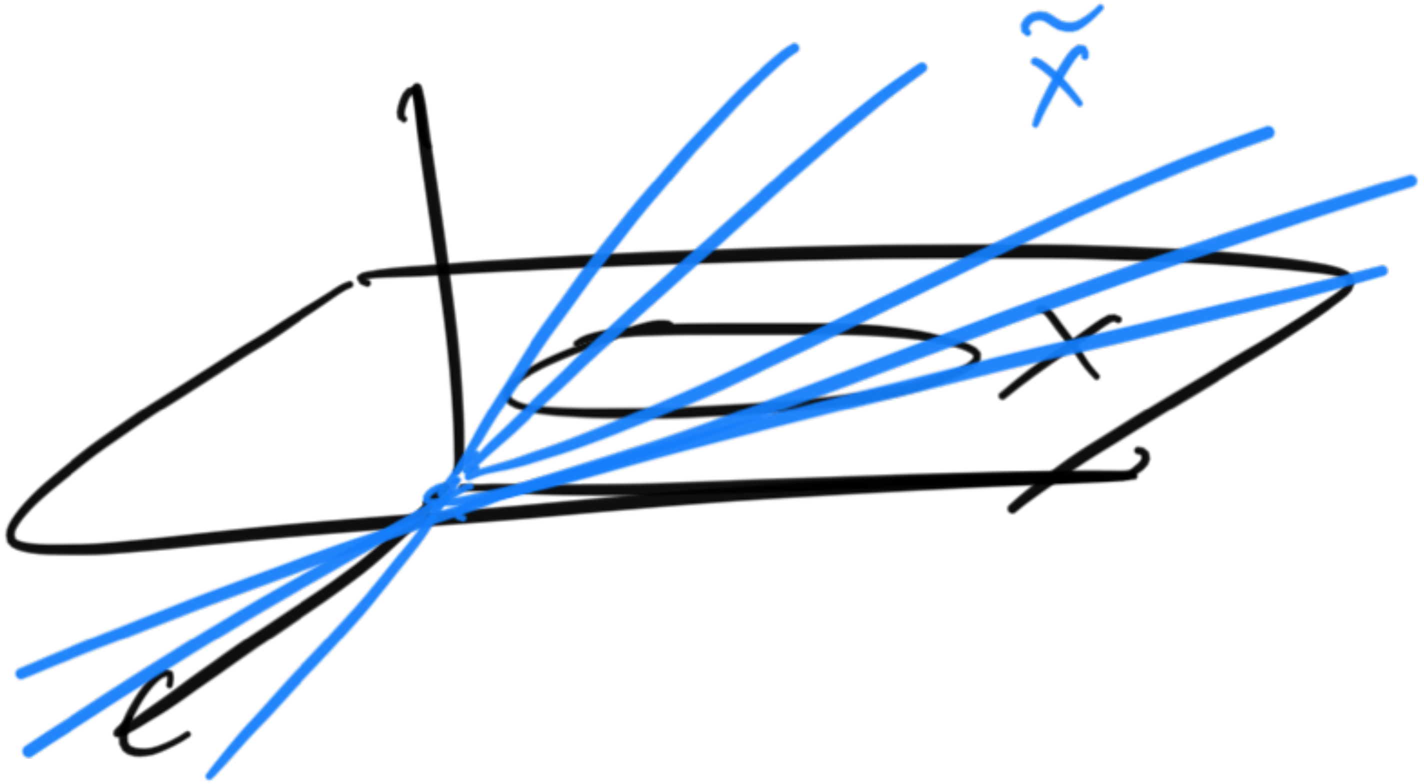
$$X \subseteq \mathbb{P}^N \rightsquigarrow \tilde{X} \subseteq \mathbb{A}^{N+1}$$

↑ stesse equaz di X

$$Y \subseteq \mathbb{P}^N \rightsquigarrow \tilde{Y} \subseteq \mathbb{A}^{N+1}$$

geometricamente $\tilde{X}$ è l'unione di tutte le rette per l'origine di $\mathbb{A}^{n+1}$ che corrispondono ai punti di X; analogo per $\tilde{Y}$.

$\tilde{X}$ si chiama il cono affine di X.



$\tilde{X} \cap \tilde{Y} \neq \emptyset$!!! l'origine di $\mathbb{A}^{n+1}$ sta sia in $\tilde{X}$ che in $\tilde{Y}$.

$\Rightarrow$ le componenti irriducibili di $\tilde{X} \cap \tilde{Y}$ hanno dimensione

$$\geq \underset{\substack{\uparrow \\ \dim \tilde{X}}}{(m+1)} + \underset{\substack{\uparrow \\ \dim \tilde{Y}}}{(n+1)} - (N+1) = \underbrace{m+n-N}_{\geq 0} + 1 \geq 1$$

$$\Rightarrow \exists \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{A}^{n+1}}}{P} \neq (0, \dots 0) \qquad P \in \tilde{X} \cap \tilde{Y}$$

$\Rightarrow$ P definisce un punto di $X \cap Y$ in $\mathbb{P}^N$.

Oss: se $X \subseteq \mathbb{P}^N$ è solo quasi-proiettiva

$\Rightarrow$ $\tilde{X}$ = cono affine di X = $\{$unione di tutte le

rette di $\mathbb{A}$ corrisp
ai punti di X }

non è in generale una varietà quasi-proiettiva!

Es: $X = \{x = 1\} \subseteq \underset{\substack{\uparrow \\ (x,y)}}{\mathbb{A}^2} \subseteq \underset{\substack{\uparrow \\ [x:y:z]}}{\mathbb{P}^2}$

$\tilde{X} \subseteq \underset{\substack{\uparrow \\ (x,y,z)}}{\mathbb{A}^3}$

$\tilde{X}$ non è quasiproiett
(non è un aperto
in $\overline{\tilde{X}}$)