$O \in \mathbb{A}^n$; $\pi : \tilde{\mathbb{A}}^n \longrightarrow \mathbb{A}^n$ scoppiamento di $\mathbb{A}^n$ in O

$\tilde{\mathbb{A}}^n \subseteq \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$

$\tilde{\mathbb{A}}^n = \{ (v, \ell) : v \in \ell \}$

Se $\varphi : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ è una trasformazione lineare invertibile ($\varphi = M$ è una matrice $n \times n$ con $\det M \neq 0$)

Posso vedere φ come $\varphi : \mathbb{A}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n$ che fissa $O \in \mathbb{A}^n$

φ si solleva naturalmente a $\tilde{\varphi} : \tilde{\mathbb{A}}^n \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathbb{A}}^n$

$$\tilde{\varphi}(v, \ell) = (\varphi(v), \varphi(\ell))$$

↑ è ben definita perché $\det \varphi \neq 0$

Stesso discorso su $\varphi = \varphi(s)$, famiglia di applicazioni lineari $\varphi(s) : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ con $\det \varphi(s) \neq 0$ $\forall s$.

Scoppiamenti locali di varietà quasi-proiettive.

$x_0 \in X$, x_0 punto liscio. Possiamo supporre X sia irriducibile (X è comunque irriducibile attorno a x_0). Se $\dim X = n$, allora $\dim \Theta_{X,x_0} = n$. Posso trovare n parametri locali attorno a x_0, ovvero $\exists\, u_1, \dots u_n \in \mathcal{O}_{X, x_0}$ t.c. $[u_1] \dots [u_n]$ in $m_{x_0}/m_{x_0}^2$ è una base lineare di $m_{x_0}/m_{x_0}^2 = \Theta^*_{X,x}$. Dal lemma di Nakayama segue che $u_1 \dots u_n$ sono generatori dell'ideale m_{x_0} come $\mathcal{O}_{X,x_0}$-modulo.

A meno di restringersi a un intorno U di x_0 (come all'insieme di definizione di tutte le u_i)

$$u_1, \dots u_n : \begin{array}{c} x_0 \\ \cap \\ U \\ \cap \\ X \end{array} \longrightarrow \mathbb{A}^n \quad ; \quad u_1(x_0) = \dots = u_n(x_0) = \vec{0}$$

(prendendo U abbastanza piccolo possiamo anche supporre $\vec{u}^{-1}(0) = \{x_0\}$)

$$\begin{tikzcd}
\tilde{U} := U \times_{\mathbb{A}^n} \tilde{\mathbb{A}}^n \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \tilde{\mathbb{A}}^n \arrow[d, "\pi"] \\
U \arrow[r, "\vec{\mu}"] & \mathbb{A}^n
\end{tikzcd}$$

$$x_0 \longmapsto \vec{0}$$

Por definição $\tilde{U} := U \times_{\mathbb{A}^n} \tilde{\mathbb{A}}^n = \{ (\underset{\underset{U}{\cap}}{x}, \underset{\underset{\tilde{\mathbb{A}}^n}{\cap}}{p}) : \vec{\mu}(x) = \pi(p) \}$

$$= \{ (x, \underset{\underset{\tilde{\mathbb{A}}^n}{\cap}}{(v, l)}) : \vec{\mu}(x) = v \, ; \, v \in l \}$$

$$= \{ (x, l) : \vec{\mu}(x) \in l \}$$

In termini di equazioni $\tilde{U} = \{(x, [t^0; \dots ; t^{n-1}]) :$

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} u_1(x) & \dots & u_n(x) \\ t^0 & \dots & t^{n-1} \end{pmatrix} \leq 1 \}$$

$\tilde{U}$ è lo scoppiamento locale di X in x_0.

$\tilde{U}$ per come è stato definito dipende dalla scelta del sistema di parametri locali $\{u_1 \dots u_n\}$?

<u>Oss</u>: Se $\{u_1 \dots u_n\}$ e $\{v_1 \dots v_n\}$ sono due sistemi di parametri locali attorno a x_0, a meno di restringersi a un opportuno intorno di x_0

$$
\begin{tikzcd}
\tilde{U}_1 \arrow[rr, "\exists \varphi", "\sim"'] \arrow[dr, "u_1 \dots u_n"'] & & \tilde{U}_2 \arrow[dl, "v_1 \dots v_n"] \\
& U &
\end{tikzcd}
$$

$$\tilde{U}_1 = \{ (x, \ell) : \vec{u}(x) \in \ell \}$$

$$\tilde{U}_2 = \{ (x, m) : \vec{v}(x) \in m \}$$

$\{u_1 \dots u_n\}$ genera m_{x_0} come $\mathcal{O}_{X,x_0}$-modulo

$$v_i \in m_{x_0} \Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

H matrice $n \times n$ a coeff. in U_{x,x_0}

$$\tilde{U}_2 = \{(x, m) : H(x)\vec{u}(x) \in m\}$$

$$(x, \ell) \in \tilde{U}_1 \xmapsto{\varphi_H} (x, H(x)\ell) \in \tilde{U}_2$$

$\vec{u}(x) \in \ell$

se $H(x)$ è invertibile

$\Updownarrow$

$\det H(x) \neq 0$

$\Updownarrow$ a meno di restringersi a un intorno di x_0

$\det H(x_0) \neq 0.$

$$\vec{v}(x) \overset{?\ \text{sì}}{\in} H(x)\ell$$

$$\| $$

$$H(x)\vec{u}(x)$$

$H(x) = H(x_0) + L(x)$ $\qquad$ $L(x)$ è una matrice a coeff in m_{x_0}

$$\vec{v}(x) = H(x)\cdot\vec{u}(x) = H(x_0)\,\vec{u}(x) + \underbrace{\underset{m_{x_0}}{L(x)}\,\underset{m_{x_0}}{\vec{u}(x)}}_{m_{x_0}^2}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}(x) = H(x_0)\,\vec{u}(x) \mod m_{x_0}^2$$

$$[\vec{v}(x)] = H(x_0)\cdot[\vec{u}(x)] \quad \text{in } m_{x_0}/m_{x_0}^2$$

base di $m_{y_0}/m_{y_0}^2$ $\qquad \Rightarrow \det H(x_0) \neq 0.$

$$\begin{tikzcd} \tilde{U}_1 \arrow[rr, "\varphi_H", "\sim"'] \arrow[dr] & & \tilde{U}_2 \arrow[dl] \\ & U & \end{tikzcd} \qquad \varphi_H^{-1} \circ \varphi_H = \varphi_H \circ \varphi_H^{-1} = id$$

Scoppiamenti globali di varietà quasiproiettive (in un punto liscio).

$x_0 \in X \subseteq \mathbb{P}^N$; X irriducibile
liscio

Voglio definire $\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$

$$X \times_{\mathbb{P}^N} \tilde{\mathbb{P}}^N \longrightarrow \tilde{\mathbb{P}}^N \leftarrow \text{scoppiamento di } \mathbb{P}^N \text{ in } x_0$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ X & \hookrightarrow & \mathbb{P}^N \end{array}$$

$\dim X = n < N$

$\pi : \tilde{\mathbb{P}}^N \longrightarrow \mathbb{P}^N$ si restringe a un isomorfismo

$$\pi\Big|_{\mathbb{P}^N \setminus \{x_0\}} : \tilde{\mathbb{P}}^N \setminus \pi^{-1}(x_0) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^N \setminus \{x_0\}$$

$\exists\ \sigma : \mathbb{P}^N \setminus \{x_0\} \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathbb{P}}^N \setminus \pi^{-1}(x_0)$ che

inverte π.

Dentro $\tilde{\mathbb{P}}^N \setminus \pi^{-1}(x_0)$ c'è una copia di $X \setminus \{x_0\}$

$$\sigma(X \setminus \{x_0\}) \subseteq \widetilde{\mathbb{P}}^N \setminus \pi^{-1}(x_0) \subseteq \widetilde{\mathbb{P}}^N$$

Definiamo $\widetilde{X}$ come $\overline{\sigma(X \setminus \{x_0\})}$ in $\widetilde{\mathbb{P}}^N$

Se $\dim X < N \Rightarrow X \times_{\mathbb{P}^N} \widetilde{\mathbb{P}}^N$ <u>non</u> è irriducibile

ma è costituito da <u>due</u> componenti irriducibili:

$\widetilde{X}$ e $\pi^{-1}(x_0) \cong \mathbb{P}^{N-1}$

Inoltre $\widetilde{X}$ è uno scoppiamento locale di X in x_0

detto bene: $\exists\ U$ intorno di x_0:

$$\widetilde{U} = \pi^{-1}(U) \hookrightarrow \widetilde{X} \qquad \widetilde{U} \to U \text{ è uno scoppiamento}$$

locale

$$x_0 \in U \hookrightarrow X$$

$$\left(\pi|_{\tilde{X}}\right)^{-1}(x_0) \cong \mathbb{P}^{n-1}$$

Poiché x_0 è un punto liscio di $X \subseteq \mathbb{P}^N$

$\exists$ parametri locali $u_1, \dots, u_N$ attorno a $x_0 \in \mathbb{P}^N$

tali che $X \cap U = \{u_{n+1} = 0, \dots, u_N = 0\}$

aperto intorno di x_0 in $\mathbb{P}^N$

Inoltre $u_1|_X, \dots, u_n|_X$ sono parametri locali per X

attorno a x_0.

Andiamo a vedere $\sigma(X \setminus \{x_0\})$.

$\sigma(x) = (x, \ell)$: $\underset{x \neq x_0}{x \in X \cap U}$, ℓ è una retta

con $(u_1 \dots u_N)(x) \in \ell$ (qui sto usando il fatto che
$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathbb{A}}^N & \longrightarrow & \tilde{\mathbb{P}}^N \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{A}^N & \hookrightarrow & \mathbb{P}^N \end{array}$$
)

$x \in X \cap U \longleftrightarrow u_{m+1}(x) = 0 \ \dots \ u_N(x) = 0$.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ [t^1 \dots t^N]}}{u_1(x) \dots u_N(x) \in \ell} \longleftrightarrow \mathrm{rg}\begin{pmatrix} u_1(x) \dots & u_m(x) & u_{m+1}(x) & \dots & u_N(x) \\ t^1 \dots & t^m & t^{m+1} & \dots & t^N \end{pmatrix} \underset{1}{\overset{}{\geq}}$$

$\Leftrightarrow \{ u_{m+1}(x) = 0 \ \dots \ u_N(x) = 0$ ← condizione di appartenenza a X

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} u_1(x) & \dots & u_n(x) & 0 & \dots & 0 \\ t^1 & \dots & t^n & t^{n+1} & \dots & t^N \end{pmatrix} \leq 1$$

$$\Updownarrow$$

parametri locali su X attorno a x_0

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} u_1(x) & \dots & u_n(x) \\ t^1 & \dots & t^n \end{pmatrix} \leq 1 \; ; \; t^{n+1} = 0, \dots t^N = 0.$$

equazioni che descrivono lo scoppiamento locale $\tilde{U}$.

$\tilde{X}$ ha equazioni locali

$$\begin{cases} u_{n+1}(x) = \dots u_N(x) = 0 \\ \operatorname{rg}\begin{pmatrix} u_1(x) & \dots & u_n(x) \\ t^1 & \dots & t^n \end{pmatrix} \leq 1 \\ t^{n+1} = \dots t^N = 0 \end{cases}$$

$\forall\, x \in U$ (anche per $x = x_0$)

(Per $x = x_0$ la seconda equazione diventa

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ t^1 & & \cdots & t^n \end{pmatrix} \leq 1 \quad \text{che è sempre soddisfatta}$$

ritroviamo $\left(\pi\big|_{\tilde{X}}\right)^{-1}(x_0) \cong \mathbb{P}^{n-1}$)

Riassumendo: X quasi-proiettiva, $x_0 \in X$ punto liscio

Abbiamo costruito $\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$ scoppiamento di X in x_0. $\tilde{X}$ è irriducibile (se lo è X)

$\tilde{X}$ è liscia (se X è liscia)

$$\pi\big| \; : \; \tilde{X} \setminus \pi^{-1}(x_0) \xrightarrow{\ \sim\ } X \setminus \{x_0\}$$

$\Big|_{\tilde{X} \setminus \pi^{-1}(x_0)}$

In particolare $\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$ è un isomorfismo birazionale regolare.

Infine $\pi^{-1}(x_0) \cong \mathbb{P}^{n-1}$; $\pi\left(\pi^{-1}(x_0)\right) = \{x_0\}$

$n = \dim X = \dim \tilde{X}$

Dunque se $n \geq 2 \Longrightarrow \operatorname{codim}_{\tilde{X}} \left(\pi^{-1}(x_0)\right) = 1$ ma

$\operatorname{codim}_X \pi\left(\pi^{-1}(x_0)\right) \geq 2$

Definizione : $f : X \longrightarrow Y$ isomorfismo birazionale regolare

$Z \subseteq X$. Z si dice sottovarietà eccezionale (rispetto a f) se $\operatorname{codim}_X(Z) = 1$, e $\operatorname{codim}_Y f(Z) \geq 2$

Vale la seguente affermazione:

$f : X \longrightarrow Y$ isomorfismo birazionale regolare suriettivo

Allora i) f è un isomorfismo

oppure

ii) dentro X ci sono sottovarietà eccezionali.

<u>Dim</u>: $\exists\ g : Y \dashrightarrow X$ che inverte f.

dove g è una mappa razionale

Se g è regolare in tutta $Y \Rightarrow g : Y \to X$

g è l'inversa di $f \Rightarrow f$ è isomorfismo.

Altrimenti c'è un luogo non vuoto di indeterminazione

per g. Sia $y \in Y$ nel luogo di indeterminazione per g

Sia $x \in X$: $f(x) = y$

Possiamo restringerci a un intorno affine U di x in X

Siano $t^1, \dots t^N$ coordinate affini $U \subseteq \mathbb{A}^N$

$g : Y \dashrightarrow X$; localmente $g : V \dashrightarrow U \subseteq \mathbb{A}^N$

$g = (g^1 \dots g^N)$ $\quad g^i$ sono funzioni razionali

$g^i = u^i / v^i$ $\quad u^i, v^i$ funzioni regolari attorno a y

$y \in Y$ l'ho scelto nel luogo di indeterminazione di g $\exists i$ t.c. $v^i(y) = 0$.

($\mathcal{O}_{Y,y}$ è UFD $\Rightarrow$ posso supporre u^i, v^i non abbiano fattori in comune)

$$f^*(g) = g \circ f = id$$

$$\| $$

$$f^*(g^1 \dots g^N) = (f^*(g^1), \dots f^*(g^N))$$

$$f^*(g^i) = t^i \qquad (id(t^1 \dots t^N) = (t^1 \dots t^N))$$

$$f^*(u^i/v^i) \overset{\shortparallel}{=} f^*(u^i)/f^*(v^i)$$

$$\Rightarrow \quad f^*(u^i) = t^i f^*(v^i)$$

Sia i tale che $v^i(y) = 0$

Consideriamo l'equazione $f^*(v^i) = 0$. Questa descrive una varietà $Z \subseteq X$. Per costruzione $x \in Z$.

$$Z = \{p \in X : v^i(f(p)) = 0\}$$

$$Z \subseteq V(f^*(u^i)) \quad \Big(p \in V(f^*(v^i)) \Rightarrow f^*(v^i)(p) = 0$$

$$\Rightarrow t^i(p)\, f^*(v^i)(p) = 0 \Rightarrow$$

$f^*(u^i)(p) = 0 \;)$

Z è una sottovarietà definita da una singola equazione in $X \Rightarrow \operatorname{codim}_X Z = 1$.

Resta da vedere che $\operatorname{codim}_Y f(Z) \geq 2$.

Se $\operatorname{codim}_Y f(Z) = 1 \Rightarrow$ localmente attorno a $y \in f(Z)$ potremmo descrivere $f(Z)$ con una singola equazione.

Più precisamente, $\exists\, h \in \mathcal{O}_{Y,y}$ t.c. $I_{f(Z),y} = (h)$

$$f^* u^i \Big|_Z \equiv 0 \quad (\text{per definizione di } Z)$$

$$I_{f(Z),y} = \left\{ \varphi \in \mathcal{O}_{Y,y} : \varphi\Big|_{f(Z)} \equiv 0 \right\}$$

$=$

$f^* u^i \big|_Z \equiv 0$ (prima la abbiamo scritto nelle forme $Z \subseteq V(f^* u^i)$)

$\{ \varphi \in \mathcal{O}_{Y,y} : \varphi \circ f \big|_Z \equiv 0 \} = \{ \varphi \in \mathcal{O}_{Y,y} : f^*(\varphi) \big|_Z \equiv 0 \}$

$\Rightarrow u^i, v^i \in I_{f(Z),y} = (h)$

$\Rightarrow u^i$ e v^i hanno un fattore comune!

che è assurdo. $\Rightarrow \operatorname{codim}_Y f(Z) \geq 2$

$\Rightarrow Z$ è una sottovarietà eccezionale.

<u>Oss</u>: $f : X \longrightarrow Y$ morfismo regolare, isomorfismo

birazionali

X proiettiva $\Rightarrow$ f è suriettiva

dim: X proiettiva $\Rightarrow$ $f(X)$ è chiuso in Y

$\exists\, U \subseteq X$ aperto denso, $V \subseteq Y$ aperto denso t.c. $f(U) = V$

$V = f(U) \subseteq f(X) \subseteq Y$

$$\Rightarrow \underset{\displaystyle Y}{\overline{V}} \subseteq \overline{f(X)} = f(X) \subseteq Y \Rightarrow f(X) = Y.$$

<u>Corollario</u>: X varietà proiettiva liscia

$f : X \longrightarrow Y$ morfismo regolare, isomorfismo birazionale. Allora f è isomorfismo oppure X ha sottovarietà eccezionali

---

Corollario: $f : X \longrightarrow Y$ morfismo regolare, f isomorfismo birazionale, X curva proiettiva liscia (X varietà proiettiva liscia di dim 1)

$\Rightarrow$ f è isomorfismo.

<u>dim</u>: Z sottovarietà eccezionale di X

$$\Rightarrow \operatorname{codim}_Y f(Z) \geq 2 \Rightarrow \underset{\substack{\| \\ 1}}{\dim Y} - \dim f(Z) \geq 2$$

impossibile.

Tutto questo suggerisce la seguente strategia per classificare le varietà algebriche (quasi-proiettive) a meno di equivalenza birazionale:

Def: date due varietà quasi-proiettive X_1 e X_2 birazionalmente equivalenti, diciamo che X_1 domina X_2 se $\exists\ \varphi : X_1 \longrightarrow X_2$ equivalenza birazionale regolare.

Def: diciamo che X è un modello minimale per la sua classe di equivalenza birazionale se [X domina Y nella sua classe]

$$\Downarrow$$

$$X \simeq Y$$

isomorfo

Ovvero se [$\varphi: X \to Y$ isomorfismo birazionale regolare]

$\Rightarrow \varphi$ isomorfismo.

Esempio: le curve proiettive lisce sono modelli minimali.