

Istituzioni di matematica; a.a. 2023/24 - foglio 1

1. Indichiamo con \mathbb{Z} l'insieme dei numeri interi, $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$, con \mathbb{Q} l'insieme dei numeri razionali, $\mathbb{Q} = \{0, 1, -1, \frac{1}{3}, -\frac{11}{17}, \dots\}$ e con \mathbb{R} l'insieme dei numeri reali, $\mathbb{R} = \{0, 1, -1, \frac{1}{3}, -\frac{11}{17}, \sqrt{2}, \pi, -14.7283648723657 \dots, 7^{\sqrt{3}}, \dots\}$. Dire quali delle seguenti funzioni siano iniettive, quali suriettive e quali biiettive:

- (a) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}; \quad f(x) = x + 1;$
- (b) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}; \quad f(x) = 2x;$
- (c) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}; \quad f(x) = 2x + 1;$
- (d) $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}; \quad f(x) = x + 1;$
- (e) $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}; \quad f(x) = 2x;$
- (f) $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}; \quad f(x) = 2x + 1;$
- (g) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(x) = x + 1;$
- (h) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(x) = 2x;$
- (i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(x) = 2x + 1;$
- (j) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 1}.$

2. Risolvere le seguenti disuguaglianze:

- (a) $2x + 1 > 3;$
- (b) $-2x + 1 > 3;$
- (c) $\frac{x + 2}{x + 3} > 0;$
- (d) $x^2 + 2x - 3 > 0;$
- (e) $x^2 + x - 6 \leq 0;$
- (f) $x^2 + x + 4 > 0;$
- (g) $x^2 + x + 8 \leq 0;$
- (h) $-x^2 - 3x + 4 \geq 0;$
- (i) $\frac{x^2 + 2x - 3}{x - 7} > 0$
- (j) $\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 3x + 2} \leq 0$
- (k) $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 7} < 0$

3. Dimostrare che la funzione $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ definita da $f(x) = \frac{1}{x}$ è una funzione strettamente decrescente.

4. Dimostrare che la funzione $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ definita da $f(x) = x^2 + x$ è una funzione strettamente crescente.