Istituzioni di matematica; a.a. 2023/24 - foglio 5

1. Ricordiamo che con sviluppo di Taylor della funzione $f(x)$ nel punto x_0 fino all'ordine N si intende l'espressione

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \cdots ,$$

dove $f^{(n)}$ indica la funzione f derivata n-volte e i puntini alla fine della formula stanno per: "un errore trascurabile rispetto all'ultimo termine scritto esplicitamente". Ad esempio lo sviluppo di Taylor della funzione $\mathrm{sen}(x)$ nel punto $x_0 = 0$ fino all'ordine 3 è l'espressione

$$\mathrm{sen}(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \cdots$$

   (a) Determinare lo sviluppo fino all'ordine 3 della funzione $f(x) = \log(x-1)$ nel punto $x_0 = 0$.

   (b) Determinare lo sviluppo fino all'ordine 3 della funzione $f(x) = e^{x^2}$ nel punto $x_0 = 0$.

2. Utilizzare i due sviluppi dell'esercizio precedente per calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\log(x - 1)}$$

3. Calcolare i differenziali df delle seguenti funzioni

   (a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4$

   (b) $f(x) = \mathrm{sen}(x^2)$

   (c) $f(x) = e^{x^3}$

4. Utilizzare il risultato dell'esercizio precedente per calcolare i seguenti integrali

   (a) $\int_0^1 x^3 dx$

   (b) $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} 2x\,\mathrm{sen}(x^2) dx$

   (c) $\int_0^1 3x^2\, e^{x^3}\, dx$