Prendiamo $f(x,y,z) \in \mathbb{K}[[x,y,z]]$. Possiamo vedere f come una serie formale nella variabile x a coefficienti in $\mathbb{K}[[y,z]]$:

$$f(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(y,z)x^k = \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k(y,z)x^k = x^{k_0}\left(\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k(y,z)x^{k-k_0}\right)$$

Avremo

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$$

con $f_k(x,y,z) \in \mathbb{K}[x,y,z]_k$ polinomio omogeneo di grado k. Supponiamo, tanto per fissare le idee, che il grado minimo per $f_k \neq 0$ sia 2, di modo che

$$f = f_2 + \sum_{k=3}^{\infty} f_k$$

A meno di un cambio lineare di variabili, possiamo assumere

$$f_2(x,y,z) = \alpha x^2 + \beta(y,z)x + \gamma(y,z)$$

dove $\beta(y,z)$ e $\gamma(y,z)$ sono polinomi in y,z omogenei di grado 1 e 2 rispettivamente, e $\alpha \in \mathbb{K}^*$. A meno di moltiplicare tutto per α^{-1} non è restrittivo supporre $\alpha = 1$. In $\sum_{k=3}^{\infty} f_k(x,y,z)$ mettiamo in evidenza il termine x^2 ove possibile, poi il termine x ove possibile nei termini residui. Otteniamo così

$$\sum_{k=3}^{\infty} f_k(x,y,z) = \phi(x,y,z)x^2 + \psi(y,z)x + \eta(y,z)$$

dove $\phi(x,y,z) \in \mathbb{K}[[x,y,z]]$ e $\psi(y,z), \eta(x,y) \in \mathbb{K}[[y,z]]$. Mettendo tutto insieme troviamo

$$f(x,y,z) = (1+\phi(x,y,z))x^2 + (\beta(y,z)+\psi(y,z))x + (\gamma(y,z)+\eta(y,z)).$$

Poniamo

$$v(x,y,z) = 1 + \phi(x,y,z)$$

Dato che $\phi(x,y,z)x^2$ è una serie formale i cui monomi hanno grado almeno pari a 3, $\phi(x,y,z)$ è una serie formale i cui monomi hanno grado almeno pari a 1, ovvero il suo termine noto è 0. Ne segue che il termine noto di $v(x,y,z)$ è 1. Quindi v è invertibile nell'anello delle serie formali $\mathbb{K}[[x,y,z]]$. Poniamo

$$u = v^{-1}.$$

Moltiplicando tutto per u troviamo

$$\begin{aligned} u(x,y,z)f(x,y,z) &= x^2 + u(x,y,z)(\underbrace{\beta(y,z)+\psi(y,z)}_{A(y,z)})x + u(x,y,z)(\underbrace{\gamma(y,z)+\eta(y,z)}_{B(y,z)}) \\ &= x^2 + u(x,y,z)A(y,z)x + u(x,y,z)B(y,z) \end{aligned}$$

Osserviamo che, per costruzione $A(0,0) = B(0,0) = 0$. Guardiamo a $u(x,y,z)$ come a una serie formale in x a coefficienti in $\mathbb{K}[[y,z]]$. Troviamo

$$u(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_i(y,z)x^i,$$

da cui

$$\begin{aligned} x^2 + uA(y,z)x + uB(y,z) &= x^2 + (\sum_{k=0}^{\infty} u_i(y,z)x^i)A(y,z)x + (\sum_{k=0}^{\infty} u_i(y,z)x^i)B(y,z) \\ &= Bu_0 + (Bu_1 + Au_0)x + (Bu_2 + Au_1 + 1)x^2 + \sum_{k=3}^{\infty}(Bu_i + Au_{i-1})x^i \end{aligned}$$

Il coefficiente

$$1 + A(y,z)u_1(y,z) + B(y,z)u_2(y,z)$$

valutato in $(0,0)$ vale 1, quindi è inveribile in $\mathbb{K}[[y,z]]$ e quindi anche in $\mathbb{K}[[x,y,z]]$. Moltiplicando per l'inverso di questo coefficiente ci siamo ricondotti a considerare una serie formale della forma

$$g(x,y,z) = \gamma_0 + \gamma_1 x + x^2 + \sum_{k=3}^{\infty} \gamma_k x^k \tag{1}$$

con $\gamma_i \in \mathbb{K}[[y,z]]$ e $\gamma_i(0,0) = 0$ per $i \neq 2$. Dunque l'omomorfismo

$$\begin{aligned} \rho\colon \mathbb{K}[[x,y,z]] &\to \mathbb{K}[[x]] \\ f(x,y,z) &\mapsto f(x,0,0) \end{aligned}$$

manda g in x^2. Ne segue che gli elementi $\{1,x\}$ generano l'anello quoziente $\mathbb{K}[[x]]/(x^2)$ come $\mathbb{K}$-modulo, e dunque come $\mathbb{K}[[y,z]]/(y,z)$-modulo. Consideriamo allora l'anello $A = \mathbb{K}[[y,z]]$, l'ideale $I = (y,z)$ e l'A-modulo $M = \mathbb{K}[[x,y,z]]/(g)$. Non è difficile convincersi del fatto che M è un A-modulo finitamente generato (i termini noti degli elementi dell ideale (g), pensati come serie formali in x formano un ideale di A, che è noetheriano (stessa dimostrazione che per gli anelli di polinomi), etc.). L'ideale I è tale che il sistema moltiplicativo $S_I = 1 + I$ è costituito interamente da invertibili di A. Gli elementi $\{1,x\}$ di M generano $M/(y,z)M = \mathbb{K}[[x]]/(x^2)$ come A/I-modulo. A questo punto possiamo utilizzare il solito Nakayama per dire che gli elementi $\{1,x\}$ generano M come A-modulo. Detto più esplicitamente, questo significa che ogni elemento $h \in \mathbb{K}[[x,y,z]]$ si può scrivere come

$$h(x,y,z) = k_0(y,z) + k_1(y,z)x + l(x,y,z)g(x,y,z)$$

(se proviamo a risolvere a mano questa equazione ci accorgiamo che non è affatto ovvio che abbia una soluzione: che ne abbia una è uno dei tanti esempi della potenza del lemma di Nakayama).

In particolare, prendendo

$$h(x, y, z) = x^2$$

troviamo che esistono $k_0(y, z), k_1(y, z) \in \mathbb{K}[[y, z]]$ e $l(x, y, z) \in \mathbb{K}[[x, y, z]]$ tali che

$$l(x, y, z)g(x, y, z) = x^2 - k_1(y, z)x - k_0(y, z).$$

Per concludere ci basta mostrare che l è invertibile in $\mathbb{K}[[x, y, z]]$. Ma questo è immediato: scrivendo $l(x, y, z) = \sum_{i=0}^{\infty} l_i(y, z)x^i$ e uguagliando i coefficienti di x^2 a destra e a sinistra dell'uguale troviamo

$$l_0 + l_1\gamma_1 + l_2\gamma_2 = 1,$$

da cui, valutando in $(y, z) = (0, 0)$,

$$l_0(0, 0) = 1.$$