Dalle simmetrie dell'azione alle correnti conservate. Iniziamo come al solito con un modello finito-dimensionale. Sia pertanto M una varietà differenziabile compatta dotata di una forma di volume $d$vol e sia $S : M \to \mathbb{R}$ un'applicazione differenziabile (l'azione). Se $f : M \to \mathbb{R}$ è una funzione integrabile rispetto alla misurs $e^{-S}d$vol, scriviamo $\langle f \rangle$ per indicare l'integrale

$$\int_M f e^{-s} d\mathrm{vol}$$

(valor medio di f). Infine, se v è un campo vettoriale su M, indichiamo con $\mathrm{div}_S(v)$ la divergenza di v rispetto alla forma di volume $e^{-S}d$vol, ovvero la funzione su M definita da

$$\mathcal{L}_v(e^{-S}d\mathrm{vol}) = \mathrm{div}_S(v)e^{-S}d\mathrm{vol}.$$

Diremo che un campo vettoriale v è una *simmetria* di $(M, S, d\mathrm{vol})$ se v è una simmetria dell'azione, cioè $(dS|v) = 0$, e ha divergenza nulla rispetto alla forma di volume $d$vol. Notiamo che queste due condizioni implicano in particolare $\mathrm{div}_S(v) = 0$.

Aggiungiamo adesso l'ultimo ingediente: supponiamo di avere un'azione delle funzioni C^∞ su una superficie connessa Σ su un sottospazio V dello spazio vettoriale $\mathcal{X}(M)$ dei campi vettoriali su M,

$$C^\infty(\Sigma; \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} V \to V$$

Fissata una simmetria v in V possiamo allora definire un'applicazione lineare

$$\begin{aligned} \Phi_v : C_0^\infty(\Sigma; \mathbb{R}) &\to C^\infty(M; \mathbb{R}) \\ \rho &\mapsto \mathrm{div}_S(\rho \cdot v). \end{aligned}$$

Poiché v è una simmetria di $(M, S, d\mathrm{vol})$, le costanti sono nel nucleo di Φ_v. D'altronde le costanti sono il nucleo del differenziale di de Rham

$$d : C^\infty(\Sigma; \mathbb{R}) \to \Omega^1(\Sigma; \mathbb{R})$$

e dunque esiste (non unica) un'applicazione lineare

$$j_v : \Omega^1(\Sigma; \mathbb{R}) \to C^\infty(M; \mathbb{R})$$

tale che

$$\Phi_v(\rho) = j_v(d\rho).$$

L'applicazione j_v può essere vista come un'applicazione differenziabile da M in $\Omega^1(\Sigma; \mathbb{R})^*$: per ogni punto m di M,

$$j_v^m : \omega \mapsto (j_v(\omega))_m.$$

Con qualche abuso qua e là possiamo supporre che i funzionali lineari su $\Omega^1(\Sigma)$ siano dati da 1-forme:

$$\omega \mapsto \int_\Sigma \eta \wedge \omega.$$

Con questa identificazione, j_v^m è una 1-forma su Σ, con la proprietà che

$$\Phi_v(\rho)_m = \int_\Sigma j_v^m \wedge d\rho = -\int_\Sigma \rho\, dj_v^m,$$

dove, al solito, il principio del migliore dei mondi possibili ci dice che non c'è da preoccuparsi di eventuali termini di bordo. Ovvero, abbiamo la seguente identità tra funzioni su M:

$$\Phi_v(\rho) = -\int_\Sigma \rho\, dj_v,$$

dove nell'espressione a destra è solo j_v a dipendere dal punto m di M, e il differenziale è il differenziale di de Rham in Σ (e dunque non legge la dipendenza di j_v da m). Prendiamo adesso il valor medio di $\Phi_v(\rho)$:

$$\langle \Phi_v(\rho)\rangle = \langle \mathrm{div}_S(\rho \cdot v)\rangle = \int_M \mathcal{L}_{\rho\cdot v}(e^{-S} d\mathrm{vol}) = 0.$$

D'altronde, scambiando l'integrazione su M con l'integrazione su Σ,

$$\langle \Phi_v(\rho)\rangle = -\int_\Sigma \rho\, d\langle j_v\rangle.$$

Dunque

$$\int_\Sigma \rho\, d\langle j_v\rangle = 0$$

per ogni funzone ρ, da cui

$$d\langle j_v\rangle = 0,$$

ovvero la 1-forma $\langle j_v\rangle$ è chiusa. Tanto per confondere le idee, i testi di stringhe tendono a scrivere questa equazione come $dj_v = 0$. Bisogna farci l'abitudine; in fondo non è diverso da imparare a leggere g^{21} come "l'elemento di posto due-uno della matrice g" anziché come "la variabile g elevata alla ventuno".

Le correnti come operatori. Sia ora p un punto fissato di Σ e sia

$$A(p) : M \to \mathbb{R}$$

una funzione che "dipenda solo dal comportamento di m attorno a p". Questa richiesta non ha ovviamente alcun senso così in astratto, mentre è chiaro cosa voglia dire nel caso concreto in cui M è uno spazio di mappe dalla superficie Σ in un'altra varietà. Possiamo però formalizzare nel contesto finito-dimensionale nel quale stiamo lavorando la richiesta di "dipendenza dal germe di m in p" mediante l'azione di $C^\infty(\Sigma;\mathbb{R})$ sul sottospazio V di $\mathcal{X}(M)$ che abbiamo assunto come parte dei nostri dati. Alla funzione $A(p)$ chiederemo di soddisfare

$$\mathcal{L}_{\rho\cdot v} A(p) = \mathcal{L}_v A(p)$$

per ogni ρ identicamente uguale ad 1 in un intorno di p, e per ogni v in V. Se una tale funzione $A(p)$ possa effettivamente esistere senza essere banale in dimensione finita non ci deve interessare, quello che stiamo facendo adesso è solamente mettere in evidenza quale sia la proprietà formale che ci interesserà usare quando M sarà uno spazio di mappe su Σ (e la nozione di "dipendere solamente dal germe in p sarà dunque chiara).

Assumiamo ora che v sia una simmetria di $(M, S, d\mathrm{vol})$ appartenente al sottospazio V e calcoliamo la media di $\mathcal{L}_{\rho\cdot v}A(p)$. Si ha:

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{L}_{\rho\cdot v}A(p)\rangle &= \int_M \langle \mathcal{L}_{\rho\cdot v}(A(p)e^{-S}d\mathrm{vol}) - \langle A(p)\mathrm{div}_S(\rho\cdot v)\\ &= \langle A(p)\int_\Sigma \rho\, dj_v\rangle\\ &= \int_\Sigma \rho\,\langle A(p)dj_v\rangle.\end{aligned}$$

Se come ρ prendiamo una funzione identicamente uguale ad 1 in un intorno di p otteniamo

$$\langle \mathcal{L}_v A(p)\rangle = \int_\Sigma \rho\,\langle A(p)dj_v\rangle.$$

Da questa identità si vede che il termine a sinistra non dipende da ρ, purché ρ sia costanetemente uguale ad 1 in un intorno di p. Con funzioni ρ di questo tipo possiamo approssimare in norma L^1 la funzione caretteristica di un disco B_p centrato in p. Otteniamo dunque

$$\langle \mathcal{L}_v A(p)\rangle = \int_{B_p} \langle A(p)dj_v\rangle.$$

Il punto p di Σ è fissato una volte per tutte: la funzione $A(p)$ è una funzione del solo punto m di M, e dunque non viene vista dal differenziale di de Rham su Σ:

$$A(p)dj_v = d(A(p)\,j_v).$$

Inoltre, come abbiamo già osservato, il differenziale di de Rham su Σ non vede l'integrazione su M. Ne segue:

$$\langle \mathcal{L}_v A(p)\rangle = \int_{\partial B_p} \langle A(p)j_v\rangle,$$

ovvero l'azione della derivata di Lie $\mathcal{L}$ si esprime mediante gli operatori

$$\int_{\partial B_p} \langle \cdots j_v\rangle$$

Anche qui, la noatazione dei fisici non è la più amichevole possibile: si scrive semplicemente

$$\int_{\partial B_p} j_v$$

per indicare l'operatore scritto sopra.

Esempio: i generatori delle simmetrie conformi. Vogliamo adesso calcolare esplicitamente la corrente e l'operatore associati alla simmetria $z^{n+1}\partial_z$ dell'azione

$$S[X] = \int_\Sigma \partial X^\mu \wedge \overline{\partial} X^\nu G_{\mu\nu},$$

dove $\Sigma = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ e X è una mappa da Σ in $\mathbb{R}^D$ dotato della metrica standard. Per come è definita in generale la corrente j_v non dobbiamo far altro che esprimere la divergenza $\mathrm{div}_S(\rho\cdot v)$ come $-\int_\Sigma j_v \wedge d\rho$. Se assumiamo che il campo vettoriale $\rho \cdot v$ non abbia divergenza rispetto alla misura $d$vol (uno dei tanti vantaggi del lavorare nel migliore dei mondi possibili), quuesto si riduce all'identità

$$\mathcal{L}_{\rho\cdot v} S = -\int_\Sigma j_v \wedge d\rho.$$

Nel nostro caso, il sottospazio V dello spazio dei campi vettoriali su $\mathrm{Maps}(\Sigma, \mathbb{R}^D)$ è lo spazio vettoriale dei campi vettoriali indotti dai diffeomorfismi infinitesimali di Σ (ovvero dai campi vettoriali su Σ). L'azione di $C^\infty(\Sigma;\mathbb{R})$ su questi campi vettoriali è quella ovvia indotta dalla moltiplicazione

$$C^\infty(\Sigma;\mathbb{R}) \otimes_\mathbb{R} \mathcal{X}(\Sigma) \to \mathcal{X}(\Sigma).$$

Per calcolare la variazione dell'azione S rispetto alla variazione di X indotta dal campo vettoriale $\rho(z,\overline{z})\, z^{n+1}\partial_z$ è conveniente ragionare come segue: mentre l'azione S è invariante per i soli diffeomorfismi conformi, l'azione di Polyakov $S_P[X,g]$ è invariante per tutti i diffeomorfismi. In particolare $\mathcal{L}_{\rho z^{n+1}\partial_z} S_P = 0$. Dunque, se indichiamo con $\delta_w X$ e $\delta_w g$ le variazioni di X e g indotte dal diffeomorfismo infinitesimale $w = \rho z^{n+1}\partial_z$, troviamo

$$\mathcal{L}_w S = \frac{\delta S_P}{\delta X}\delta_w X\Big|_{g=g_0} = -\frac{\delta S_P}{\delta g}\delta_w g\Big|_{g=g_0},$$

dove g_0 è la metrica standard su $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Ricordando la definizione del tensore energia-impulso, troviamo dunque

$$\mathcal{L}_w S = \int_\Sigma (T(z)\delta_w g^{zz} + \tilde{T}(\overline{z})\delta_w g^{\overline{z}\overline{z}}) dz \wedge d\overline{z}$$

Rimangono da calcolare le variazioni $\delta_w g^{zz}$ e $\delta_w g^{\overline{z}\overline{z}}$ nel punto $g = g_0$. Si ha

$$\mathcal{L}_w(g^{ab}\partial_a \otimes \partial_b) = \mathcal{L}_w(g^{ab})\partial_a \otimes \partial_b - g^{ab}\partial_a(\rho\, z^{n+1})\partial_z \otimes \partial_b - g^{ab}\partial_b(\rho\, z^{n+1})\partial_a \otimes \partial_z.$$

Ricordando che in $g = g_0$ si ha $g^{zz} = g^{\overline{z}\overline{z}} = 0$ e $g^{z\overline{z}} = g^{\overline{z}z} = 1/2$, se ne ricava

$$\delta_w g^{zz} = (\partial_{\overline{z}}\rho) z^{n+1}; \qquad \delta_w g^{\overline{z}\overline{z}} = 0.$$

Dunque

$$\mathcal{L}_{\rho z^{n+1}\partial_z} S = -\int_\Sigma T(z)(\partial_{\overline{z}}\rho) z^{n+1} dz \wedge d\overline{z} = -\int_\Sigma (T(z) z^{n+1} dz) \wedge d\rho,$$

da cui

$$j_{z^{n+1}\partial_z} = T(z)z^{n+1}dz.$$

Il corrispondente operatore è di conseguenza

$$L_n := \frac{1}{2\pi i}\oint T(z)z^{n+1}dz$$