Consideriamo gli spazi topologici $\mathbb{R}^2$ con coordinate (x, y), $\mathbb{R}$ con coordinata x, S^1 con coordinata θ e $[0, 1]$ con coordinata t. Allora è immediato verificare che il diagramma

$$\begin{tikzcd}
S^1 \arrow[r, "\theta\mapsto(\cos\theta,\sin\theta)"] \arrow[d, "\theta\mapsto(\theta,0)"'] & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \arrow[d, "(x,y)\mapsto x"] \\
S^1 \times [0,1] \arrow[r, "(\theta,t)\mapsto -1+(1-t)(1+\cos\theta)"'] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

è commutativo, ed è facile convincersi che non possa esistere alcuna applicazione continua f che renda commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
S^1 \arrow[r, "\theta\mapsto(\cos\theta,\sin\theta)"] \arrow[d, "\theta\mapsto(\theta,0)"'] & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \arrow[d, "(x,y)\mapsto x"] \\
S^1 \times [0,1] \arrow[r, "(\theta,t)\mapsto -1+(1-t)(1+\cos\theta)"'] \arrow[ur, dashed, "f"] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Infatti, se una tale f esistesse, indichiamo con $f_1\colon S^1 \to \mathbb{R}^2\setminus\{(0, 0)\}$ l'applicazione $\theta \mapsto f(1, \theta)$. Per definizione di omotopia, l'applicazione f è una omotopia di applicazioni da S^1 in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tra $f_0\colon \theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta)$ e f_1. Dalla commutatività del triangolo in basso segue che $f_1(\theta) = (-1, g(\theta))$ per qualche funzione continua $g\colon S^1 \to \mathbb{R}$. Ma allora $h(\theta, t) = (-1, (t-1)g(\theta)$ è una omotopia di applicazioni da S^1 in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tra f_1 e l'applicazione costante $c_{(-1,0)}\theta \mapsto (-1, 0)$. Abbiamo allora

$$f_0 \simeq f_1 \simeq c_{(-1,0)}$$

e dunque l'applicazione

$$\begin{aligned} f_0\colon S^1 &\to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ \theta &\mapsto (\cos\theta, \sin\theta) \end{aligned}$$

sarebbe omotopa ad un'applicazione costante, il che è impossibile (la classe di omotopia di f_0 è il generatore di $\pi_1\big(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}; (1, 0)\big) \simeq \mathbb{Z}$).