Il calcolo dell'omologia dei complessi di $\mathbb{Z}$-moduli liberi usando la forma normale di Smith

Supponiamo di avere un complesso di $\mathbb{Z}$-moduli liberi di rango finito

$$\cdots \to \mathbb{Z}^{r_{n+1}} \xrightarrow{\partial_{n+1}} \mathbb{Z}^{r_n} \xrightarrow{\partial_n} \mathbb{Z}^{r_{n-1}} \to \cdots$$

Come si calcola esplicitamente l'n-mo gruppo di omologia $H_n = \ker(\partial_n)/\mathrm{Im}(\partial_{n+1})$? per prima cosa scriviamo le matrici A_i che rappresentano i differenziali ∂_i rispetto alle basi canonice degli $\mathbb{Z}$-moduli liberi $\mathbb{Z}^{r_i}$. A questo punto determiniamo una $\mathbb{Z}$-base per $\ker(\partial_n)$. Dobbiamo determinare una $\mathbb{Z}$-base di $\ker(A_n)$, quindi mettiamo A_n in forma normale di Smith scrivendo

$$A_n = T_n D_n S_n,$$

dove T_n e S_n sono matrici in $GL(r_n, \mathbb{Z})$ e in $GL(r_{n-1}, \mathbb{Z})$, rispettivamente. Sia $\mathrm{rk}(\partial_n)$ il rango di ∂_n (che è anche il rango di D_n). Allora una base $\mathcal{B}_n$ di $\ker(A_n)$ è data dalle ultime $r_n - \mathrm{rk}(\partial_n)$ colonne della matrice $(S_n)^{-1}$. Indichiamo con B_n la matrice che ha come colonne i vettori di base così trovati e mettiamo la da parte.

Adesso guardiamo a $\mathrm{Im}(\partial_{n+1}) = \mathrm{Im}(A_{n+1})$. Questo è lo $\mathbb{Z}$-sottomodulo di $\mathbb{Z}^{r_n}$ generato dalle colonne di A_{n+1}. Dato che stiamo considerando un complesso omologico, e quindi $A_n A_{n+1} = 0$, questo sar anche uno $\mathbb{Z}$-sottomodulo di $\ker(\partial_n)$. La scelta della base $\mathcal{B}_n$ induce un isomorfismo $\Phi_{\mathcal{B}_n}$ di $\mathbb{Z}$-moduli tra $\ker(\partial_n)$ e $Z^{r_n - \mathrm{rk}(\partial_n)}$, e vogliamo vedere cosa diventa $\mathrm{Im}(\partial_{n+1})$ mediante questo isomorfismo. Facendo questo il quoziente $\ker(\partial_n)/\mathrm{Im}(\partial_{n+1})$ diventa un quoziente del tipo $\mathbb{Z}^r/N$ e questi quozienti li sappiamo calcolare mediante la forma di Smith. Per definizione dell'isomorfismo $\Phi_{\mathcal{B}_n}$, le immagini delle colonne di A_{n+1} mediante $\Phi_{\mathcal{B}_n}$ altro non sono che i vettori delle coordinate di questi vettori colonna nella base $\mathcal{B}_n$. Tutti insieme questi vettori di coordinate formano una matrice X_{n+1} a coefficienti in $\mathbb{Z}$ tale che

$$B_n X_{n+1} = A_{n+1}$$

ed il fatto che $\mathcal{B}_n$ sia una $\mathbb{Z}$-base ci dice che X_{n+1} esiste ed è univocamente determinata da questa equazione. Come possiamo determinare esplicitamente X_{n+1}? un modo di procedere è il seguente: le colonne di B_n, formando una $\mathbb{Z}$-base, sono in particolare linearmente indipendenti su $\mathbb{Q}$, e dunque formano una $\mathbb{Q}$-base di $\ker(\partial_n) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Ma allora esisterà un'unica matrice $\tilde{X}_{n+1}$ a coefficienti in $\mathbb{Q}$ tale che

$$B_n \tilde{X}_{n+1} = A_{n+1}$$

Per unicità, e dal fatto che $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ abbiamo allora che $X_{n+1} = \tilde{X}_{n+1}$. Vale a dire, possiamo risolvere il nostro problema in $\mathbb{Q}$ usando tutta la tecnologia dell'algebra lineare e la soluzione che troveremo sarà automaticamente una soluzione in $\mathbb{Z}$. Un modo di risolvere in $\mathbb{Q}$ è individuare in B_n un minore quadrato di rango massimo M_n (che sarà quindi un minore $r_n - \mathrm{rk}(\partial_n)$ per $r_n - \mathrm{rk}(\partial_n)$, dato che i vettori colonna di B_n sono $\mathbb{Q}$-linearmente indipendenti), eliminare da B_n le righe fuori dal minore ed eliminare le corrispondenti righe di A_{n+1} ottenendo una matrice $\tilde{A}_{n+1}$. Adesso la matrice X_{n+1} soddisfa l'equazione

$$M_n X_{n+1} = \tilde{A}_{n+1}.$$

Ma anche quest'ultima equazione ammette un'unica soluzione, che per l'invertibilità di M_n è $(M_n)^{-1}\tilde{A}_{n+1}$. per unicità, questa è allora la soluzione del nostro problema originale, ovvero $X_{n+1} = (M_n)^{-1}\tilde{A}_{n+1}$. Notiamo che si tratta di una matrice con $r_n - \mathrm{rk}(\partial_n)$ righe e r_{n+1} colonne, come dev'essere.

Dato che lavorando con gli $\mathbb{Z}$-moduli abbiamo imparato a temere $\mathbb{Q}$ più dei greci quando portano i doni, vediamo che è possibile determinare X_{n+1} anche senza mai uscire da $\mathbb{Z}$, usando la forma normale di Smith. Per far questo, mettiamo B_n in forma di Smith, si modo che l'equazione $B_n X_{n+1} = A_{n+1}$ diventi

$$\Upsilon_n \Delta_n \Xi_n X_{n+1} = A_{n+1}.$$

La matrice Υ_n è invertibile, quindi questa è equivalente a

$$\Delta_n \Xi_n X_{n+1} = (\Upsilon_n)^{-1} A_{n+1}.$$

Poniamo $Y_{n+1} = X_{n+1}$. L'equazione diventa

$$\Delta_n Y_{n+1} = (\Upsilon_n)^{-1} A_{n+1}.$$

Dato che Δ_n ha rango $r_n - \mathrm{rk}(\partial_n)$, che è anche il rango massimo per una matrice delle sue dimensioni, tutte le righe di Δ_n dalla posizione $r_n - \mathrm{rk}(\partial_n) + 1$ in poi sono nulle, e questo allora sarà vero anche per la matrice prodotto $\Delta_n Y_{n+1}$ (ricordiamo che moltiplicare a destra corrisponde a effettuare combinazioni lineari delle colonne). Ma allora, dato che l'equazione $\Delta_n Y_{n+1} = (\Upsilon_n)^{-1} A_{n+1}$ deve aver soluzione, anche tutte le righe dalla posizione $r_n - \mathrm{rk}(\partial_n) + 1$ in poi di $(\Upsilon_n)^{-1} A_{n+1}$ sono nulle. Quindi l'equazione $\Delta_n Y_{n+1} = (\Upsilon_n)^{-1} A_{n+1}$ è automaticamente verificata dalla riga $r_n - \mathrm{rk}(\partial_n) + 1$ in poi e si riduce all'equazione

$$\tilde{\Delta}_n Y_{n+1} = (\Upsilon_n\widetilde{)^{-1} A}_{n+1}.$$

dove in $\tilde{\Delta}_n$ e in $(\Upsilon_n\widetilde{)^{-1} A}_{n+1}$ abbiamo scartato tutte le righe dalla riga $r_n - \mathrm{rk}(\partial_n) + 1$ in poi. Ora la k-esima riga nel prodotto $\tilde{\Delta}_n Y_{n+1}$ è una riga di interi tutti divisibili per l'intero d_k che compare nella k-esima posizione della diagonale di $\tilde{\Delta}_n$, quindi anche la k-esima riga in $(\Upsilon_n\widetilde{)^{-1} A}_{n+1}$ sarà costituita da interi tutti divisibili per d_k (altrimenti il nostro problema non avrebbe soluzione). Troviamo quindi che

$$Y_{n+1} = (\tilde{\Delta}_n)^{-1} (\Upsilon_n\widetilde{)^{-1} A}_{n+1}$$

è una matrice di interi e la soluzione del nostro problema originale è $X_{n+1} = (\Xi_n)^{-1} Y_{n+1}$ ovvero

$$X_{n+1} = (\Xi_n)^{-1} (\tilde{\Delta}_n)^{-1} (\Upsilon_n\widetilde{)^{-1} A}_{n+1}.$$

Notiamo che dal punto di vista del calcolo non c'è bisogno di calcolare $(\Upsilon_n)^{-1}A_{n+1}$ e poi scartare le ultime righe: si può calcolare direttamente $\widetilde{(\Upsilon_n)^{-1}A_{n+1}}$ fermandosi agli elementi nelle prime $r_n - \mathrm{rk}(\partial_n)$ righe di $(\Upsilon_n)^{-1}A_{n+1}$.

Una volta che abbiamo X_{n+1} abbiamo finito: l'isomorfismo $\Phi_{\mathcal{B}_n}$ trasforma $\ker(\partial_n)/\mathrm{Im}(\partial_{n+1})$ nel quoziente

$$\mathbb{Z}^{r_n-\mathrm{rk}(\partial_n)}/\mathrm{Im}(X_{n+1}),$$

dove $\mathrm{Im}(X_{n+1})$ è lo $\mathbb{Z}$-sottomodulo generato dalle colonne di X_{n+1}. Ma ora questo quoziente sappiamo calcolarlo con la forma di Smith: se $(m_1, m_2, \dots, m_q)$ sono gli interi non nulli che compaiono sulla diagonale della forma di Smith di X_{n+1}, dove chiaramente si avrà $q \le r_n - \mathrm{rk}(\partial_n)$ allora

$$\mathbb{Z}^{r_n-\mathrm{rk}(\partial_n)}/\mathrm{Im}(X_{n+1}) \cong \mathbb{Z}/(m_1) \oplus \mathbb{Z}/(m_2) \oplus \cdots \mathbb{Z}/(m_q) \oplus \mathbb{Z}^{r_{n-1}-\mathrm{rk}(\partial_n)-q},$$

e questo è il nostro modulo H_n. Notiamo che in quest'ultimo passaggio ci è servita solo la forma di Smith di X_{n+1} e non le matrici nonsingolari che mettono X_{n+1} in forma di Smith.

Vediamo un esempio di calcolo. Consideriamo un complesso

$$\cdots \to \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\partial_{n+1}} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\partial_n} \mathbb{Z} \to \cdots$$

con i differenziali ∂_{n+1} e ∂_n dati dalle matrici

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} 8 & -15 \\ -15 & 29 \\ -6 & 13 \end{pmatrix}; \qquad A_n = \begin{pmatrix} -9 & -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Scriviamo

$$\begin{pmatrix} -9 & -6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si ha

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

quindi la matrice B_n è

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Adesso determiniamo X_{n+1}. Dobbiamo risolvere

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X_{n+1} = \begin{pmatrix} 8 & -15 \\ -15 & 29 \\ -6 & 13 \end{pmatrix}.$$

Col primo metodo individuiamo in B_n il minore 2 per 2 non singolare

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Buttiamo via la terza riga e ci riconduciamo all'equazione

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X_{n+1} = \begin{pmatrix} 8 & -15 \\ -15 & 29 \end{pmatrix}$$

la cui soluzione è

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 8 & -15 \\ -15 & 29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -15 \\ -15 & 29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 29 \\ 8 & -15 \end{pmatrix}$$

Tanto per rassicurare lo scettico che è in noi, verifichiamo che scegliendo un altro minore non singolare 2 per 2 il risultato non cambia. Ad esempio scegliendo il minore

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

e buttando via la prima riga ci riconduciamo all'equazione

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X_{n+1} = \begin{pmatrix} -15 & 29 \\ -6 & 13 \end{pmatrix}.$$

la cui soluzione è

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -15 & 29 \\ -6 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -15 & 29 \\ -6 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 29 \\ 8 & -15 \end{pmatrix}$$

Notiamo che stavolta abbiamo veramente lavorato in $\mathbb{Q}$, il fatto che col primo minore fossimo rimasti in $\mathbb{Z}$ con i nostri calcoli era stato un colpo fortunato. vediamo come si trova X_{n+1} mediante la forma di Smith. Abbiamo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 8 & -15 \\ -15 & 29 \\ -6 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 8 & -15 \\ -15 & 29 \\ -6 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 29 \\ 8 & -15 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che, come previsto, ha un'ultima riga nulla. Troviamo quindi

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -15 & 29 \\ 8 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 29 \\ 8 & -15 \end{pmatrix}.$$

Adesso troviamo la forma di Smith di X_{n+1}. Dato che non ci servono le matrici invertibili che mettono X_{n+1} in forma di Smith, ci limitiamo ad operare sulle righe e sulle colonne di X_{n+1}:

$$\begin{pmatrix} -15 & 29 \\ 8 & -15 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 8 & -15 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Il nostro modulo di omologia H_n è pertanto

$$H_n = \mathbb{Z}/(1) \oplus \mathbb{Z}/(7) = \mathbb{Z}/(7).$$