Esercizi di preparazione al primo esonero

1. Sull'insieme $X = \mathbb{R}^2$ delle coppie di numeri reali si consideri la relazione

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$$

se e solo se esiste $\theta \in \mathbb{R}$ tale che $x_2 = x_1 \cos\theta - y_1 \mathrm{sen}\,\theta$ e $y_2 = x_1 \mathrm{sen}\,\theta + y_1 \cos\theta$. Stabilire se si tratti di una relazione di equivalenza e, in caso affermativo, descivere l'insieme quoziente $X/\sim$. (*Suggerimento: esprimere la relazione data in termini di un opportuno prodotto di una matrice* 2×2 *per un vettore.*)

2. Risolvere, se possibile, il sistema di congruenze

$$\begin{cases} 2x \equiv 6 \mod 36 \\ 13x \equiv 3 \mod 5 \end{cases}$$

3. Nel gruppo simmetrico S_7 sia σ la permutazione

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 4 & 7 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Determinare l'ordine di σ.

4. Nel gruppo simmetrico S_7 sia σ la permutazione

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 4 & 7 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcolare σ^{1000}.

5. Nel gruppo simmetrico S_7 sia σ la permutazione

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 4 & 7 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Stabilire se σ sia una permutazione pari o dispari.

6. Nel gruppo simmetrico S_7 sia σ la permutazione

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 4 & 7 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Esprimere σ come prodotto di 2-cicli (ovviamente non necessariamente disgiunti).

7. Nel gruppo simmetrico S_7 sia σ la permutazione

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 4 & 7 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Determinare la cardinalità del sottogruppo $C_{S_7}(\sigma)$ (il centralizzante di σ in S_7).

8. Nel gruppo simmetrico S_7 siano σ e τ le permutazioni

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 4 & 7 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}; \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 6 & 7 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

   Stabilire se σ e τ siano coniugate. In caso affermativo determinare una permutazione ρ tale che $\rho\sigma\rho^{-1} = \tau$.

9. Nel gruppo simmetrico S_7 siano σ e τ le permutazioni

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 4 & 7 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}; \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 6 & 7 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

   Stabilire se σ e τ siano coniugate. In caso affermativo determinare, se possibile, due permutazioni distinte ρ_1 e ρ_2 tali che $\rho_1\sigma\rho_1^{-1} = \rho_2\sigma\rho_2^{-1}\tau$.

10. Esibire un omomorfismo non banale $f\colon S_3 \to V_4$ (*Suggerimento: ogni omomorfismo di gruppi $f\colon G \to H$ si fattorizza come $G \xrightarrow{f} \mathrm{Im}(f) \hookrightarrow H$).*

11. Esibire un omomorfismo non banale $f\colon S_4 \to S_3$.

12. Scrivere il gruppo $(\mathbb{Z}/(26))^*$ degli invertibili nell'anello delle classi resto modulo 26 come prodotto diretto di gruppi ciclici.

13. Quanti sono gli elementi di periodo 3 nel gruppo $(\mathbb{Z}/(26))^*$ degli invertibili nell'anello delle classi resto modulo 26?

14. Sia G un gruppo e sia $f\colon G \to G$ l'applicazione definita da $f(x) = x^{-1}$ per ogni $x \in G$. Dimostrare che f è un omomorfismo se e solo se G è abeliano.

15. Sia G un gruppo e sia $f\colon G \times G$ l'applicazione definita da $f(x, y) = xy$. Dimsotrare che f è un omomorfismo se e solo se G è abeliano.

16. Sia G un gruppo e sia $f\colon G \times G$ l'applicazione definita da $f(x, y) = xy^{-1}$. Dimsotrare che f è un omomorfismo se e solo se G è abeliano.