Esercizi di preparazione al secondo esonero

1. Sia $(A, +, \cdot)$ un dominio di integrità e sia $B = A[x]/(x^2) = A[\epsilon]$, dove ϵ è un elemento tale che $\epsilon^2 = 0$. Dimostrare che non esistono omomorfismi iniettivi dall'anello B nell'anello $A \oplus A$ (e dunque in particolare $A[\epsilon]$ e $A \oplus A$ non possono mai essere isomorfi). *Suggerimento:* sia $\varphi\colon A[\epsilon] \to A \oplus A$ un omomorfismo; determinare $\varphi(\epsilon)$.

2. Dimostrare che non esiste alcun omomorfismo di anelli da $\mathbb{Z}/(2)$ in $\mathbb{Z}$. *Suggerimento:* sia $\mathbb{Z}/(2) \to \mathbb{Z}$ un omomorfismo; quanto vale allora $\varphi(1) + \varphi(1)$?

3. Sia $(A, +, \cdot)$ l'anello delle matrici 2 per 2 della forma
$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$
con $a, b \in \mathbb{R}$, con le usuali operazioni di somma e prodotto di matrici. A è un anello commutativo? è un dominio di integrità?

   Il sottoinsieme
$$I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq A$$
è un ideale (bilatero) di A? è un ideale primo? è un ideale massimale?

4. Sia E il campo di spezzamento di $x^4 - 1$ su $\mathbb{Q}$. Determinare $[E : \mathbb{Q}]$, trovare $\alpha \in E$ tale che $E = \mathbb{Q}(\alpha)$ ed esibire una base di E su $\mathbb{Q}$.

5. Determinare la cardinalità dei seguenti anelli e stabilire se siano isomorfi tra loro.
$$A = \mathbb{Z}[i]/(5); \qquad B = \mathbb{F}_5[x]/(x^2 + 2)$$

6. Sia $I \subseteq \mathbb{Q}[x]$ l'ideale
$$I = (x^3 + x^2, x^3 - x).$$
e sia $A = \mathbb{Q}[x]/I$. La classe dell'elemento $x - 1$ è invertibile in A? se sì esibire $[x-1]^{-1}$.

7. Dire se i seguenti elementi siano algebrici o trascendenti su $\mathbb{Q}$. Se algebrici specificare il corrispondente polinomio minimo:
$$2 + e, \qquad \sqrt{5} + i$$