Sulla presentazione di A_4

Consideriamo il gruppo $\langle x, y \mid x^2 = 1, y^3 = 1, (xy)^3 = 1\rangle$. Vogliamo dimostrare che questo gruppo ha al più 12 elementi. L'idea è che ogni elemento g di tale gruppo si può scrivere come

$$g = z_1^{e_1} z_2^{e_2} \cdots z_k^{e_k}$$

per qualche $k \geq 0$, dove $z_i \in \{x, y\}$ ed $e_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Adesso utilizziamo le relazioni nel gruppo per scrivere una di queste parole nel modo più semplice possibile, e andiamo a vedere quante sono le forme semplici che riusciamo a trovare. A lezione abbiamo osservato che da $(xy)^3 = 1$ segue

$$xyxy = (xy)^{-1} = y^2 x$$

e dunque

$$y^2 = xyxyx$$

e abbiamo utilizzato questo fatto per mostare possiamo sempre evitare gli y^2 nella scrittura di g. Questo argomento è però truffaldino.[1] Infatti se andiamo a eliminare y^2 in questo modo da un'espressione del tipo

$$\cdots y^2 xy \cdots$$

otteniamo

$$\cdots y^2 xy \cdots = \cdots xyxyxxy \cdots = \cdots xyxy^2 \cdots$$

e quindi non solo c'è ancora un y^2 ma l'espressione si è addirittura complicata anziché semplificarsi!

Un modo corretto di ragionare è invece il seguente: attribuiamo alla scrittura $z_1^{e_1} z_2^{e_2} \cdots z_k^{e_k}$ il *peso* $e_1 + e_2 + \cdots e_k$. Adesso possiamo dare un senso preciso all'idea di scrittura il più semplice possibile, stabilendo che una scrittura di g sia più semplice rispetto ad un'altra se ha peso minore. Ora si vede bene che effettuare la sostituzione

$$y^2 \mapsto xyxyx$$

non è in realtà una buona idea: a sinistra abbiamo peso 2, mentre a destra abbiamo peso 5. Meglio riscriversi la relazione $y^2 = xyxyx$ come

$$xy^2 x = yxy.$$

Adesso a sinistra abbiamo peso 4 mentre a destra peso 3, e questo ci dice che nessuna scrittura che contenga $\cdots xy^2 x \cdots$ possa essere ottimale. Quindi dalle nostre scritture ottimali non dobbiamo eliminare tutte quelle contenenti y^2 come

[1] L'Avversario si nasconde nei dettagli.

a lezione, ma solo quelle contenenti xy^2x. Adesso possiamo ragionare come a lezione e considerare le scritture

$$g_0 = 1; \qquad g_1 = xy^{k_1}xy^{k_2}x\cdots xy^{k_n}; \qquad g_2 = y;$$
$$g_3 = yxy^{k_1}x\cdots xy^{k_n}; \qquad g_4 = y^2; \qquad g_5 = y^2xy^{k_1}x\cdots xy^{k_n}$$

dove $k_i \in \{0,1,2\}$. Nella scrittura di g_1, affinché abbia peso minimo, tutti gli esponenti k_i devono essere 1, tranne al più l'ultimo. Quindi

$$g_1 = xyxyx\cdots xy^{k_n}$$

Ma ora ci ricordiamo che $xyxyxy = 1$ quindi affinché la scrittura di g_1 abbia peso minimo è necessario che $n \leq 2$ oppure che $n = 3$ e $k_3 = 0$. Questo ci lascia con le seguenti possibili scritture per g_1:

$$x, \quad xy, \quad xy^2, \quad xyx, \quad xyxy, \quad xyxy^2, \quad xyxyx.$$

Analogamente, nella scrittura g_3, tutti gli esponenti k_i devono essere uguali ad 1 tranne al più l'ultimo cosicché g_3 ha necessariamente la forma

$$g_3 = yxyxyx\cdots xy^{k_n},$$

e adesso la condizione $(xy)^3 = 1$ implica di nuovo che $n \leq 2$ oppure $n = 3$ e $k_3 = 0$. Questo ci lascia con le seguenti possibili scritture per g_3:

$$yx, \quad yxy, \quad yxy^2, \quad yxyx, \quad yxyxy, \quad yxyxy^2, \quad yxyxyx.$$

Lo stesso ragionamento fatto per le scritture di tipo g_5 ci lascia con le possibilità

$$y^2x, \quad y^2xy, \quad y^2xy^2, \quad y^2xyx, \quad y^2xyxy, \quad y^2xyxy^2, \quad y^2xyxyx.$$

Moltiplicandole a sinistra per $1 = x^2$ e ricordando che $xy^2x = yxy$ queste diventano

$$xyxyx, \quad xyxy^2, \quad xyx, \quad xyxy^2x, \quad xyxy^2xy, \quad xyxy^2xy^2, \quad xyxy^2xyx.$$

Le prime tre sono scritture di tipo g_1 quindi già ce le abbiamo, le altre contengono tutte la sequenza xy^2x e pssiamo semplificarle dapprima in

$$xy^2xy, \quad xy^2xy^2, \quad xy^2x, \quad xy^2xy^2x$$

e quindi in

$$yxy^2, \quad yx, \quad yxy, \quad y.$$

Ma queste sono tutte scritture di tipo g_2 o g_3 e ce le abbiamo già. In conclusione tutte le scritture di tipo g_5 sono ripetizioni di cose che avevamo già e ci siamo ridotti alle 17 scritture

$$1, \quad x, \quad xy, \quad xy^2, \quad xyx, \quad xyxy, \quad xyxy^2, \quad xyxyx$$
$$y, \quad yx, \quad yxy, \quad yxy^2, \quad yxyx, \quad yxyxy, \quad yxyxy^2, \quad yxyxyx, \quad y^2.$$

Qualunque altra scrittura diversa da queste non può essere di peso minimo. Ne segue che le scritture di peso minimo sono al più 17 e, di conseguenza, anche gli elementi del nostro gruppo sono al più 17. Vediamo se per caso anche alcune di queste scritture siano non di peso minimo, in modo da eliminarle e ridurre ulteriormente il loro numero.

Da $xyxyxy = 1$, coniugando con x si trova

$$yxyxyx = 1$$

dunque la scrittura $yxyxyx$ non è di peso minimo e si può eliminare dalla lista. Anche $xyxyx$ si può eliminare in quanto sappiamo che $xyxyx = y^2$ e y^2 ha peso minore di $xyxyx$. Moltiplicando $yxyxy$ a sinistra per $x$troviamo $x(yxyxy) = 1$, dunque $yxyxy = x^{-1} = x$ e anche $yxyxy$ si può eliminare dalla lista. Da $yxyxy = x$ segue inoltre $yxyxy^2 = xy$ e anche $yxyxy^2$ si elimina dalla lista. Infine da $yxyxyx = 1$ si ha $yxyx = (yx)^{-1} = xy^2$, e quindi anche $yxyx$ va via dalla lista.

Rimaniamo così con i 12 elementi

$$\begin{aligned}1, \quad x, \quad xy, \quad xy^2, \quad xyx, \quad xyxy, \quad xyxy^2,\\ y, \quad yx, \quad yxy, \quad yxy^2, \quad y^2,\end{aligned}$$

e dunque il gruppo $\langle x, y \mid x^2 = 1, y^3 = 1, (xy)^3 = 1\rangle$ ha cardinalità al più uguale a 12. Questo coem visto a lezione è sufficiente per concludere che in effetti il nostro gruppo è proprio isomorfo ad A_4. Ma visto che abbiamo fatto tanto per ottenere la nostra lista di 12 elementi mostriamo esplicitamente come questi corrispondano effettivamente ai 12 element di A_4 una volta che facciamo l'assegnazione

$$x \mapsto (12)(34); \qquad y \mapsto (123)$$

Abbiamo

$$\begin{aligned}
1 &\mapsto ()\\
x &\mapsto (12)(34)\\
xy &\mapsto (12)(34)(123) = (243)\\
xy^2 &\mapsto (12)(34)(123)(123) = (143)\\
xyx &\mapsto (12)(34)(123)(12)(34) = (142)\\
xyxy &\mapsto (12)(34)(123)(12)(34)(123) = (234)\\
xyxy^2 &\mapsto (12)(34)(123)(12)(34)(123)(123) = (13)(24)\\
y &\mapsto (123)\\
yx &\mapsto (123)(12)(34) = (134)\\
yxy &\mapsto (123)(12)(34)(123) = (124)\\
yxy^2 &\mapsto (123)(12)(34)(123)(123) = (14)(23)\\
y^2 &\mapsto (123)(123) = (132)
\end{aligned}$$