Geometria I - prova scritta del 20 gennaio 2017

Nome.. *Matricola*..

Tempo a disposizione per lo svolgimento della prova: 2 ore (1 ora nel caso si recuperi un esonero).

Prima parte

1. Si consideri lo spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare standard, e sia $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare rappresentata, rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^3$, dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7/9 & -4/9 & -4/9 \\ -4/9 & 1/9 & -8/9 \\ -4/9 & -8/9 & 1/9 \end{pmatrix}$$

- l'endomorfismo φ è diagonalizzabile?
- è possibile determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di φ?
- se la risposta alla domanda precedente è sì, esibire una tale base ortonormale.

2. Si consideri lo spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare standard, e sia $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare rappresentata, rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^3$, dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 8/9 & -2/9 & -2/9 \\ -2/9 & 5/9 & a \\ -2/9 & b & c \end{pmatrix},$$

dove a, b e c sono parametri reali.

- è possibile determinare i parametri a, b e c in modo tale che φ rappresenti la proiezione ortogonale su un piano di $\mathbb{R}^3$? (se sì determinarli, altrimenti dimostrare che non è possibile).

Seconda parte

1. In $\mathbb{R}^2$ dotato della topologia euclidea si consideri il sottoinsieme

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tali che } y \geq x^2\},$$

- S è aperto? • è chiuso? • qual è la frontiera di S in $(\mathbb{R}^2, \tau_{Eucl})$?

Dotiamo adesso S della topologia di sottospazio $i^*\tau_{Eucl}$.

- $(S, i^*\tau_{Eucl})$ è di Hausdorff? (T2?) • compatto?
- connesso? • connesso per archi?

Motivare le risposte (la continuità delle funzioni polinomiali $(\mathbb{R}^m, \tau_{Eucl}) \to (\mathbb{R}^n, \tau_{Eucl})$ si può assumere come nota dai corsi di analisi, non occorre ridimostrarla).

2. Siano (X, τ_X) e (Y, τ_Y) due spazi topologici e sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione. Il grafico di f è il sottoinsieme di $X \times Y$ dato da

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y \text{ tali che } y = f(x)\}$$

- dimostrare che, se f è continua e Y è di Hausdorff, allora Γ_f è un sottoinsieme chiuso di $(X \times Y, \tau_X \times \tau_Y)$, dove $\tau_X \times \tau_Y$ indica la topologia prodotto.
- mostrare con dei controesempi che se f non è continua oppure se (Y, τ_Y) non è di Hausdorff, allora Γ_f non è necessariamente un chiuso di $(X \times Y, \tau_X \times \tau_Y)$.