Vogliamo risolvere l'equazione

$$x^2 = 8 \mod 113$$

Si tratta di un'equazione del tipo $x^2 = a \mod p$ con $a = 8$ e $p = 113$. Verifichiamo per prima cosa che l'equazione abbia soluzione:

$$\left(\frac{8}{113}\right) = \left(\frac{2^2 \cdot 2}{113}\right) = \left(\frac{2}{113}\right) = 1,$$

dato che $113 = 1 \mod 8$.

Adesso scriviamo

$$113 - 1 = 112 = 2^4 \cdot 7$$

e calcoliamo

$$r = 8^{\frac{7+1}{2}} = 8^4 = 28 \mod 113.$$

Calcoliamo anche $a^{-1} = 8^{-1} \mod 113$. Si trova $8^{-1} = 99 \mod 113$. Si avrà allora che $r^2 \cdot a^{-1} = 28^2 \cdot 99 = 98$ è una radice 8-va di $1 \mod 113$. Verifichiamolo:

$$98^8 = (98^2)^4 = (-1)^4 = 1 \mod 113.$$

Ora vogliamo scendere da radici 8-ve a radici unesime. Per prima cosa mettiamo da parte una radice 16-esima primitiva di 1. Per far questo basta trovare un non quadrato mod 113. Si ha

$$\left(\frac{3}{113}\right) = \left(\frac{113}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) = -1,$$

quindi 3 è un non quadrato. Allora $3^7 = 40$ è una radice 16-ma primitiva di 1 mod 113. Ne segue che $40^2 = 18$ è una radice 8-va primitiva di 1, che $18^2 = 98$ è una radice quarta primitiva di 1, e $98^2 = -1$ è (ovviamente) una radice quadrata primitiva di 1.

Adesso verifichiamo se per caso la nostra radice 8-va di 1 non sia per caso una radice quarta. Si ha effettivamente $98^4 = 1 \mod 113$, quindi non dobbiamo fare correzioni. Verifichiamo se 98 sia una radice quadrata. Stavolta la risposta è no: $98^2 = -1 \mod 113$. Allora correggiamo r con la sostituzione $r \mapsto r\xi$ con ξ una radice ottava primitiva di 1. Questo perché la regola generale è: per passare da una radice 2^β-esima ad una radice $2^{\beta-1}$-esima dell'unità moltiplico r per una radice $2^{\beta+1}$-esima primitiva dell'unità. Nel nostro caso vogliamo passare da una radice quarta a una radice quadrata, quindi moltiplichiamo per una radice ottava primitiva. Abbiamo dunque $28 \mapsto 28 * 18 = 52 \mod 113$. Se adesso utilizziamo questa nuova r, ovvero $r = 52$ e calcoliamo $r^2 \cdot a^{-1}$ troveremo una radice quadrata di 1. Verifichiamolo: $52^2 \cdot 99 = -1 \mod 113$ e $(-1)^2 = 1 \mod 113$. Dal calcolo si vede che $52^2 \cdot 99$ è una radice quadrata ma non una radice unesima, dunque dobbiamo correggere la nostra r moltiplicandola per una radice quarta primitiva dell'unità: $52 \mapsto 52 \cdot 98 = 11 \mod 133$. Abbiamo finito: adesso $r^2 \cdot a^{-1}$ sarà una radice unesima dell'unità e dunque quest'ultima r soddisfa $r^2 = a$. In altre parole è la x che stavamo cercando. Verifichiamolo:

$$11^2 = 121 = 8 \mod 113.$$