Geometria 1 a.a. 2016/17 – Seconda prova di esonero

Nome ..... **Matricola** .....

(1) In $\mathbb{R}^2$ dotato della topologia Euclidea, si consideri il sottoinsieme

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tali che } xy = 1\},$$

- S è aperto? sì ☑ no
- S è chiuso? ☑ sì no

Sia ora $\pi_1 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la proiezione sul primo fattore, ovvero $\pi_1(x, y) = x$. Consideriamo su $\mathbb{R}$ la topologia euclidea, e sia $T = \pi_1(S) \subseteq \mathbb{R}$.

- T è aperto? ☑ sì no
- T è chiuso? sì ☑ no

Guardiamo ora π_1 come un'applicazione tra spazi topologici, $\pi_1 \colon (\mathbb{R}^2, \tau_{Eucl}) \to (\mathbb{R}, \tau_{Eucl})$.

- π_1 è continua? ☑ sì no
- aperta? ☑ sì no
- chiusa? sì ☑ no

Consideriamo infine sul sottoinsieme S di $\mathbb{R}^2$ la topologia di sottospazio $i^*\tau_{Eucl}$, dove $i \colon S \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ è l'inclusione.

- $(S, i^*\tau_{Eucl})$ è di Hausdorff? (T2?) ☑ sì no
- compatto? sì ☑ no
- connesso? sì ☑ no
- connesso per archi? sì ☑ no

(2) Sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ dotato del prodotto scalare standard si consideri la relazione di equivalenza data da $v \sim w$ se e solo se esiste $\varphi \in SO(2)$ tale che $\varphi(v) = w$. Dotiamo $\mathbb{R}^2$ della topologia Euclidea e indichiamo con $\pi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/SO(2)$ la proiezione al quoziente.

- $(\mathbb{R}^2/SO(2), \pi_*\tau_{Eucl})$ è di Hausdorff? ☑ sì no
- compatto? sì ☑ no
- connesso? ☑ sì no
- connesso per archi? ☑ sì no
- omeomorfo a $(\mathbb{R}, \tau_{Eucl})$? sì ☑ no
- omeomorfo a $([0, +\infty), i^*\tau_{Eucl})$? ☑ sì no

(3) Si consideri l'applicazione $s \colon (\mathbb{R}^2, \tau_{Eucl}) \to (\mathbb{R}, \tau_{Eucl})$ data da $s(x, y) = x + y$.

- s è continua? ☑ sì no
- aperta? ☑ sì no
- chiusa? sì ☑ no