Geometria I - prova scritta del 10 febbraio 2017

Nome.. *Matricola*..

Tempo a disposizione per lo svolgimento della prova: 2 ore (1 ora nel caso si recuperi un esonero).

Prima parte

1. Sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ dotato delle coordinate (x,y) si considerino le due forme quadratiche
$$Q_1(x,y) = x^2 + 4xy + 3y^2 \quad ; \qquad Q_2(x,y) = 2x^2 + 2xy - y^2.$$
   - è possibile determinare un'applicazione lineare $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $Q_1 = Q_2 \circ \varphi$?
   - se si è risposto sì alla domanda precedente determinare una tale φ; se si è risposto no dimostrare che tale φ non può esistere.

Soluzione. Le matrici che rappresentano le forme quadratiche date rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$ sono
$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \qquad Q_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

È immediato osservare che entrambe le forme quadratiche hanno rango 2 e segnatura $(1,1)$. Dunque possono essere rasformate l'una nell'altra da un cambio di coordinate, ovvero esiste un'applicazione lineare invertibile $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $Q_1 = Q_2 \circ \varphi$. Per determinate tale applicazione lineare basta portare sia Q_1 che Q_2 a forma canonica. Per Q_1 abbiamo
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Per Q_2 abbiamo
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3/2 \end{pmatrix} \to$$
$$\to \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2/3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2/3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dunque un cambio di coordinate che manda Q_2 in Q_1 è il cambio di coordinate rappresentato dalla matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2/3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & \sqrt{2} - 1/\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{2/3} \end{pmatrix}$$

vale a dire
$$\varphi(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{6}}\right)y, \sqrt{\frac{2}{3}}y\right)$$

Come verifica calcoliamo
$$\begin{aligned} Q_2(\varphi(x,y)) &= 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{6}}\right)y\right)^2 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{6}}\right)y\right)\left(\sqrt{\frac{2}{3}}y\right) - \left(\sqrt{\frac{2}{3}}y\right)^2 \\ &= x^2 + 2xy + 3y^2 \\ &= Q_1(x,y). \end{aligned}$$

2. Sullo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ dei polinomi a coefficienti reali di grado al più 2 nella variabile x si consideri il prodotto scalare
$$\langle p|q\rangle = \int_0^1 x\, p(x)\, q(x) dx$$

(non si chiede di verificare che $\langle p|q\rangle$ sia effettivamente un prodotto scalare). Sia W il sottospazio di V definito da

$$W = \{p \in V \mid p(0) = p(1)\}$$

e sia $\pi_W\colon V \to V$ la proiezione ortogonale sul sottospazio W. Determinare $\pi_W(1 + x + x^2)$.

Soluzione. Per non ucciderci a calcolare integrali, per prima cosa calcolamo la matrice che rappresenta il prodotto scalare $\langle\,|\,\rangle$ rispetto alla base canonica $\{1, x, x^2\}$ di V. Si trova facilmente che questa matrice è

$$g = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 \end{pmatrix}$$

Adesso applichiamo il procedimento di Gram-Schmidt per determinare una base ortonormale del sottospazio W. Una base di W è data da $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} = \{1, x - x^2\}$. Calcoliamo i prodotti scalari tra questi elementi:

$$\langle \mathbf{e}_1|\mathbf{e}_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1/2$$

$$\langle \mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1/12$$

$$\langle \mathbf{e}_2|\mathbf{e}_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1/60$$

La matrice che rappresenta il prodotto scalare su W rispetto alla base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ è pertanto

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/12 \\ 1/12 & 1/60 \end{pmatrix}.$$

Diagonalizziamola. Il primo cambio di base è rappresentato dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con questo cambio abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/12 \\ 1/12 & 1/60 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/12 \\ 1/12 & 1/60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/360 \end{pmatrix}$$

Il secondo cambio di base è la normalizzazione, rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 6\sqrt{10} \end{pmatrix}.$$

Il cambio di base complessivo è dunque rappresentato dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 6\sqrt{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{10} \\ 0 & 6\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

Vale a dire, una base ortonormale di W è $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\} = \{\sqrt{2}\,\mathbf{e}_1, -\sqrt{10}\,\mathbf{e}_1 + 6\sqrt{10}\,\mathbf{e}_2\} = \{\sqrt{2}, -\sqrt{10} + 6\sqrt{10}\,x - 6\sqrt{10}\,x^2\}$. La proiezione ortogonale di $p(x) = 1 + x + x^2$ su W è data da

$$\pi_W(p) = \langle \mathbf{f}_1|p\rangle \mathbf{f}_1 + \langle \mathbf{f}_2|p\rangle \mathbf{f}_2.$$

Si ha

$$\langle \mathbf{f}_1|p\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{13\sqrt{2}}{12}$$

$$\langle \mathbf{f}_1 | p \rangle = \begin{pmatrix} -\sqrt{10} & 6\sqrt{10} & -6\sqrt{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{10}}{12}$$

Dunque

$$\pi_W(1 + x + x^2) = \frac{13\sqrt{2}}{12}\sqrt{2} - \frac{\sqrt{10}}{12}(-\sqrt{10} + 6\sqrt{10}\,x - 6\sqrt{10}\,x^2) = 3 - 5x + 5x^2.$$

Seconda parte

1. Sull'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali consideriamo l'usuale distanza euclidea $d_{Eucl}(x, y) = |x - y|$ e la topologia τ_{Eucl} che questa induce.

   - Lo spazio topologico $(\mathbb{Q}, \tau_{Eucl})$ è connesso? • connesso per archi?
   - di Hausdorff? (T2?) • compatto?

   Consideriamo ora il sottoinsieme $S \subseteq \mathbb{Q}$ dato da

   $$S = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$$

   - S è un sottoinsieme limitato dello spazio metrico $(\mathbb{Q}, d_{Eucl})$?
   - S è un sottoinsieme aperto dello spazio topologico $(\mathbb{Q}, \tau_{Eucl})$? • chiuso?
   - qual è la frontiera di S in $(\mathbb{Q}, \tau_{Eucl})$?

   Dotiamo adesso S della topologia di sottospazio $i^*\tau_{Eucl}$. Lo spazio topologico $(S, i^*\tau_{Eucl})$ è compatto?

   Motivare le risposte.

   Soluzione. La metrica euclidea su $\mathbb{Q}$ è la restrizione a Q della metrica euclidea su $\mathbb{R}$. ne segue che $(\mathbb{Q}, \tau_{Eucl})$ è il sottoinsieme $\mathbb{Q}$ dello spazio topologico $(\mathbb{R}, \tau_{Eucl})$ dotato della topologia di sottospazio. Ossrvato questo, dato che con i sottospazi di $(\mathbb{R}, \tau_{Eucl})$ abbiamo molta familiarità, è facile rispondere a tutte le domande.

   Lo spazio topologico $(\mathbb{Q}, \tau_{Eucl})$ non è connesso dato che possiamo scrivere

   $$\mathbb{Q} = (\mathbb{Q} \cap (-\infty, \sqrt{2})) \cup (\mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}, +\infty))$$

   e $\mathbb{Q} \cap (-\infty, \sqrt{2})$ e $\mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}, +\infty)$ sono due aperti disgiunti e non vuoti del sottospazio $\mathbb{Q}$ di $(\mathbb{R}, \tau_{Eucl})$. Non essendo connesso non può essere neppure connesso per archi. È di Hausdorff in quanto sottospazio dello spazio di Hausdorff $(\mathbb{R}, \tau_{Eucl})$, a o anche, direttamente, perché è uno spazio metrico. Infine non è compatto perchè i sotttospazi compatti di $(\mathbb{R}, \tau_{Eucl})$ sono tutti e soli i sottoinisemi chiusi e limitati di $(\mathbb{R}, \tau_{Eucl})$, e Q non è nè chiuso nè limitato.

   Il sottoinsieme S è lmitato in quanto contenuto nella palla di centro 0 e raggio $\sqrt{2}$(in effetti coincide con questa palla). È aperto in quanto intersezione del sottospazio Q con l'aperto $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ di $(\mathbb{R}, \tau_{Eucl})$, ed è anche chiuso in quanto intersezione del sottospazio Q con il chiuso $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ di $(\mathbb{R}, \tau_{Eucl})$. Essendo sia aperto che chiuso, la sua frontiera è vuota. Infine S non è compatto in quanto la famiglia di aperti di $(S, i^*\tau_{Eucl})$ data da

   $$U_n = \mathbb{Q} \cap \left(-\sqrt{2} + \frac{1}{n}, \sqrt{2} - \frac{1}{n} \right); \qquad n \geq 1$$

   è un ricoprimento aperto di S dal quale non è possibile estrarre un sottoricoprimento finito. Notiamo come il fatto che S sia chiuso e limitato in $(\mathbb{Q}, \tau_{Eucl})$ non implichi che S sia compatto. Infatti S non è chiuso in $(\mathbb{R}, \tau_{Eucl})$.

2. Sullo spazio topologico $\mathbb{R}^2$ dotto dell'usuale topologia euclideo si consideri la relazione di equivalenza

   $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{se e solo se} \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2k\pi \\ y \end{pmatrix} \quad \text{per quache } k \in \mathbb{Z}.$$

   Dotiamo l'insieme quoziente $\mathbb{R}^2/\!\sim$ della topologia quoziente $\pi_*\tau_{Eucl}$, dove $\pi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\!\sim$ è la proiezione al quoziente.

- Lo spazio topologico $(\mathbb{R}^2/\!\sim, \pi_*\tau_{Eucl})$ è connesso?
- connesso per archi?
- di Hausdorff? (T2?)
- compatto?

Motivare le risposte.

Soluzione. Essendo immagine dello spazio connesso per archi $(\mathbb{R}^2, \tau_{Eucl})$, anche lo spazio $(\mathbb{R}^2/\!\sim, \pi_*\tau_{Eucl})$ è connesso per achi. Dunque in particolare è anche connesso. Osserviamo adesso che le due applicazioni $f\colon (\mathbb{R}^2/\!\sim, \pi_*\tau_{Eucl}) \to (S^1, \tau_{Eucl})$ e $g\colon (\mathbb{R}^2/\!\sim, \pi_*\tau_{Eucl}) \to (\mathbb{R}, \tau_{Eucl})$ date da

$$f\colon [(x,y)] \mapsto (\operatorname{sen} x, \cos x); \qquad g\colon [(x,y)] \mapsto y$$

sono continue e che $(f,g)\colon \mathbb{R}^2/\!\sim \to S^1 \times \mathbb{R}$ è iniettiva.[1] Mostriamo che $(\mathbb{R}^2/\!\sim, \pi_*\tau_{Eucl})$ è di Hausdorff. Siano infatti p e q due punti distinti di $\mathbb{R}^2/\!\sim$. Poiché (f,g) è iniettiva abbiamo che $f(p) \neq f(q)$ oppure $g(p) \neq g(q)$. Nel primo caso, poichè (S^1, τ_{Eucl}) è di Hausdorff, possiamo trovare due aperti disgiunti $A_{f(p)}$ ed $A_{f(q)}$ contenenti $f(p)$ ed $f(q)$, rispettivamente. Poiché f è continua, $U_p = f^{-1}(A_{f(p)})$ e $U_q = f^{-1}(A_{f(q)})$ sono due aperti disgiunti di $(\mathbb{R}^2/\!\sim, \pi_*\tau_{Eucl})$ contenenti p e q, rispettivamente. Nel caso in cui sia $g(p) \neq g(q)$ si ragiona analogamente. Infine, se $(\mathbb{R}^2/\!\sim, \pi_*\tau_{Eucl})$ fosse compatto, la sua immagine mediante un'applicazione continua sarebbe compatta. Ma $(\mathbb{R}, \tau_{Eucl})$ è immagine di $(\mathbb{R}^2/\!\sim, \pi_*\tau_{Eucl})$ mediante l'applicazione continua g, e non è compatto. Quindi neppure $(\mathbb{R}^2/\!\sim, \pi_*\tau_{Eucl})$ può essere compatto.

[1] Si potrebbe poi anche dimostrare che $(f,g)\colon (\mathbb{R}^2/\!\sim, \pi_*\tau_{Eucl}) \to (S^1 \times \mathbb{R}, \tau_{Eucl} \times \tau_{Eucl})$ è un omeomorfismo, ma non sarà necessario.