

Algebra lineare

ANNO ACCADEMICO 2018/19

Soluzioni della prova scritta del 24 giugno 2019

Esercizio 1. (i) Determinare gli $z \in \mathbb{C}$ che soddisfino $z^2 - z = |z|$.

RISPOSTA

Le soluzioni sono $z = 0$ e $z = 2$.

RISOLUZIONE

Da $z^2 - z = |z|$, scrivendo $z = x + iy$ troviamo

$$x^2 + 2ixy - y^2 - x - iy = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

ovvero

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - x = \sqrt{x^2 + y^2} \\ 2xy - y = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda ricaviamo sue possibilità: $y = 0$ e $x = 1/2$. Il caso $y = 0$ porta a $x^2 - x = |x|$, ovvero a

$$\begin{cases} x^2 - 2x = 0; & x \geq 0 \\ x^2 = 0; & x < 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono evidentemente $x = 0$ e $x = 2$. Dunque troviamo $z = 0 + 0i = 0$ oppure $z = 2 + 0i = 2$. Il caso $x = 1/2$ porta a

$$-\frac{1}{4} - y^2 = \sqrt{\frac{1}{4} + y^2}$$

che non può avere soluzioni dato che il termine a sinistra dell'uguale è strettamente negativo. Le uniche soluzioni dell'equazione data sono pertanto $z = 0$ e $z = 2$.

Alternativamente, osserviamo che $z = 0$ è una soluzione dell'equazione. Per trovare le altre soluzioni, supponiamo ora quindi $z \neq 0$.

Scrivendo z come $z = ru$ con $r = |z| > 0$ e $u = \frac{z}{|z|}$ (che quindi soddisfa $|u| = 1$), l'equazione diventa $r^2u^2 - ru = r$. Dividendo ambo i membri per r , otteniamo $ru^2 - u - 1 = 0$, ossia

$$u = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4r}}{2r}.$$

Poiché $1 + 4r$ è reale positivo, concludiamo che u debba essere reale, e quindi anche z , ossia $z = x + 0i$. L'equazione diventa quindi $x^2 - x = |x|$ nella variabile $x \neq 0$ reale.

Supponendo $x > 0$, otteniamo $x^2 - 2x = 0$, con unica soluzione ammissibile $x = 2$.

Supponendo $x < 0$, otteniamo $x^2 = 0$, che non ha soluzioni ammissibili.

Concludiamo che le uniche due soluzioni sono $z = 0$ oppure $z = 2$.

Ancora una soluzione. Scrivendo $u = e^{i\theta}$, da $ru^2 - u - 1 = 0$ si ricava

$$r = e^{-2i\theta}(1 + e^{i\theta}) = e^{-\frac{3}{2}i\theta}(e^{-\frac{1}{2}i\theta} + e^{\frac{1}{2}i\theta}) = 2 \operatorname{Re}(e^{\frac{1}{2}i\theta}) e^{-\frac{3}{2}i\theta}$$

e dunque

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}\theta = 2k\pi \\ r = 2 \operatorname{Re}(e^{\frac{1}{2}i\theta}) \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} \theta = -\frac{4}{3}k\pi \\ r = 2\operatorname{Re}(e^{\frac{2}{3}k\pi i}) \end{cases}$$

Il valore di θ (a meno di multipli interi di 2π) e di r non varia se sommiamo a k un multiplo di 3, per cui dobbiamo calcolare solo i casi $k = 0$, $k = 1$ e $k = 2$. Per $k = 0$ troviamo $\theta = 0$ e $r = 2$, per cui $z = 2$. Per $k = 1$ e per $k = 2$ troviamo $r < 0$ e dunque questi valori non possono essere accettati.

- (ii) Siano $p_1 = t^4 - 7t^3 - 2t^2 + 12t + 14$ e $p_2 = t^3 - 6t^2 - 8t + 7$ polinomi reali in t . Dire se p_1, p_2 abbiano una radice reale in comune.

RISPOSTA

I polinomi p_1 e p_2 hanno in comune la radice reale $t = 7$.

RISOLUZIONE

Infatti, p_1, p_2 hanno in comune la radice $\lambda \in \mathbb{R}$ se e solo se sono entrambi divisibili per $t - \lambda$, ossia se e solo se il loro massimo comun divisore ha anch'esso λ come radice. Per calcolare $MCD(p_1, p_2)$ usiamo l'algoritmo di Euclide. Calcoliamo $p_1 = (t-1)p_2 + r$ con $r = -3t + 21 = -3(t-7)$. Inoltre, $p_2 = (-\frac{1}{3}t^2 - \frac{1}{3}t + \frac{1}{3})r$ e dunque $MCD(p_1, p_2) = t - 7$. Ne segue che p_1, p_2 hanno in comune la sola radice 7.

Esercizio 2. Sia \mathcal{S} lo spazio vettoriale reale delle successioni $(x_n)_{n \geq 1}$ di numeri reali. Si considerino i seguenti sottoinsiemi W_1, W_2 di \mathcal{S} :

$$\begin{aligned} W_1 &= \{(x_n) \in \mathcal{S} \mid \text{la successione } (x_n) \text{ ha minimo assoluto o massimo assoluto per } n = 1\} = \\ &= \{(x_n) \in \mathcal{S} \mid (x_1 \leq x_n \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}) \text{ oppure } (x_1 \geq x_n \text{ per ogni } n \in \mathbb{N})\} \\ W_2 &= \{(x_n) \in \mathcal{S} \mid \text{la successione } (x_n) \text{ è limitata}\} = \{(x_n) \in \mathcal{S} \mid \exists K \in \mathbb{R} \text{ tale che } |x_n| < K \quad \forall n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

- (i) Per ciascun $i = 1, 2$, determinare se W_i sia un sottospazio vettoriale di \mathcal{S} .

RISPOSTA

W_1 non è un sottospazio vettoriale di \mathcal{S} . Invece W_2 è un sottospazio vettoriale.

RISOLUZIONE

Infatti, nel primo caso le successioni $(2, 1, -1, 0, 0, \dots, 0, \dots)$ e $(-2, 0, 0, \dots, 0, \dots)$ appartengono a W_1 , mentre la loro somma $(0, 1, -1, 0, 0, \dots, 0, \dots)$ non appartiene a W_1 .

Nel secondo caso, notiamo che

- la successione nulla (elemento neutro di \mathcal{S}) è limitata (basta prendere $K = 1$);
- sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e supponiamo $(x_n) \in W_2$, e quindi esiste $K > 0$ tale che (x_n) soddisfi $|x_n| < K$ per ogni n ; allora la successione $\lambda \cdot (x_n) = (\lambda x_n)$ è anch'essa limitata, in quanto soddisfa $|\lambda x_n| < \hat{K}$ con $\hat{K} := |\lambda|K$ per ogni n . E dunque $\lambda(x_n) \in W_2$;
- supponiamo $(x_n), (y_n) \in W_2$, e quindi esistono $K, K' > 0$ tali che $|x_n| < K$ e $|y_n| < K'$ per ogni n ; allora la somma $(x_n + y_n) \in \mathcal{S}$ soddisfa $|x_n + y_n| < |x_n| + |y_n| < K''$ con $K'' := K + K'$ per ogni n e quindi $(x_n + y_n) \in W_2$.

- (ii) Per ciascun W_i che sia un sottospazio di \mathcal{S} , dire se W_i abbia dimensione finita.

RISPOSTA

Il sottospazio W_2 non ha dimensione finita.

RISOLUZIONE

Per dimostrarlo, esibiremo per ogni $k \geq 1$ un sottoinsieme $A_k \subset W_2$ di k vettori linearmente indipendenti.

Procediamo nel modo seguente. Per ogni $k \geq 1$ intero, sia $x^{(k)} \in W_2$ la successione $x^{(k)} = (x_n^{(k)})$ tale che

$$x_n^{(k)} := \begin{cases} 1 & \text{se } n = k \\ 0 & \text{se } n \neq k. \end{cases}$$

Definiamo $A_k := \{x^{(1)}, \dots, x^{(k)}\}$.

Per verificare l'indipendenza lineare di A_k , siano $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ tali che

$$a_1x^{(1)} + a_2x^{(2)} + \dots + a_kx^{(k)} = 0 \in W_2.$$

La successione $a_1x^{(1)} + a_2x^{(2)} + \dots + a_kx^{(k)}$ è però $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, 0, 0, \dots, 0, \dots)$. Essendo tale successione uguale alla successione nulla, allora $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$.

Esercizio 3. Considerare lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ delle matrici 2×2 reali e l'applicazione lineare $F : \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ definita come $F(X) := Z \cdot X$, dove $Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

- (i) Determinare il polinomio minimo dell'applicazione F e dire se F sia diagonalizzabile.

RISPOSTA

Il polinomio minimo di F è $q_F = t^2 - 2$. L'applicazione F è diagonalizzabile.

RISOLUZIONE

Notiamo che $Z^2 = 2I$, e quindi $F^2(X) = (F \circ F)(X) = 2X$ per ogni $X \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$. Posto $q = t^2 - 2 \in \mathbb{R}[t]$, ne segue che $q(F) = 0$. Dunque il polinomio minimo q_F di F divide q .

D'altra parte, se q_F avesse grado 1, allora F dovrebbe essere un multiplo dell'identità, e in particolare $F(I) = ZI = Z$ dovrebbe essere un multiplo di $I \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$. Poiché Z non è un multiplo di I , il polinomio q_F ha grado almeno 2, e quindi $q_F = q$.

Poiché $q_F = (t - \sqrt{2})(t + \sqrt{2})$ si fattorizza completamente su \mathbb{R} , ne segue che F è diagonalizzabile.

- (ii) Calcolare gli autovalori di F e determinare basi per gli autospazi di F .

RISPOSTA

Gli autovalori sono $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$.

Basi degli autospazi $E_{\sqrt{2}}(F)$ e $E_{-\sqrt{2}}(F)$ sono $\mathcal{B} = \{A, B\}$ e $\mathcal{B}' = \{A', B'\}$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

RISOLUZIONE

Infatti, gli autovalori sono le radici del polinomio minimo. Poiché $q_F = (t - \sqrt{2})(t + \sqrt{2})$, gli autovalori di F sono $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$.

Se $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, abbiamo $Z \cdot X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 2a & 2b \end{pmatrix}$. Abbiamo quindi

$$E_\lambda(F) := \left\{ X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \mid \begin{pmatrix} c & d \\ 2a & 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} \right\}$$

Determinando prima gli autovalori con $b = d = 0$ e poi quelli con $a = c = 0$, si ottiene rapidamente

$$E_{\sqrt{2}}(F) := \left\{ X = \begin{pmatrix} a & b \\ a\sqrt{2} & b\sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \text{span}(A, B)$$

con $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$. Similmente, otteniamo

$$E_{-\sqrt{2}}(F) := \left\{ X = \begin{pmatrix} a' & b' \\ -a'\sqrt{2} & -b'\sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \mid a', b' \in \mathbb{R} \right\} = \text{span}(A', B')$$

con $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ e $B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

(iii) Determinare il polinomio caratteristico di F .

RISPOSTA

Il polinomio caratteristico di F è $p_F = (t^2 - 2)^2$.

RISOLUZIONE

Infatti, dal punto precedente abbiamo che entrambi gli autovalori $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ hanno molteplicità geometrica 2, e quindi algebrica 2 (essendo F diagonalizzabile). Ne segue che $p_F = (t - \sqrt{2})^2(t + \sqrt{2})^2 = (t^2 - 2)^2$.

Esercizio 4. Siano $A, B \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Calcolare il polinomio caratteristico, gli autovalori (e le loro molteplicità algebriche) di A e di B .

RISPOSTA

I polinomi caratteristici sono $p_A = p_B = (1 - t)^2(2 - t)$. Dunque sia A che B hanno autovalori 1 e 2 con molteplicità algebriche $m_1 = 2$ e $m_2 = 1$.

RISOLUZIONE

Il calcolo di p_A è immediato, essendo A triangolare superiore. Il calcolo di p_B è molto semplice se si sviluppa $\det(B - tI)$ rispetto alla terza colonna.

(ii) Determinare le dimensioni degli autospazi e degli autospazi generalizzati di A e di B .

RISPOSTA

Per A , l'autospazio $E_1(A)$ ha dimensione 2 (e coincide con l'autospazio generalizzato $\tilde{E}_1(A)$) e l'autospazio $E_2(A)$ ha dimensione 1 (e coincide con l'autospazio generalizzato $\tilde{E}_2(A)$).

Per B , l'autospazio $E_1(B)$ ha dimensione 1 (mentre l'autospazio generalizzato $\tilde{E}_1(B)$ ha dimensione 2) e l'autospazio $E_2(B)$ ha dimensione 1 (e coincide con l'autospazio generalizzato $\tilde{E}_2(B)$).

RISOLUZIONE

Dal punto precedente, abbiamo $m_1 = 2$ e $m_2 = 1$ sia per A che per B . Dunque gli autospazi generalizzati $\tilde{E}_1(A)$ e $\tilde{E}_1(B)$ hanno dimensione $m_1 = 2$ e gli autospazi generalizzati $\tilde{E}_2(A)$ e $\tilde{E}_2(B)$ hanno dimensione $m_2 = 1$.

Da un calcolo diretto si ha $E_1(A) = \text{span}(e_1, e_2)$ e $E_1(B) = \text{span}(e_3)$. Dunque $\dim(E_1(A)) = 2$ e $\dim(E_1(B)) = 1$.

Inoltre, $E_2(A) = \text{span}(e_1 + e_2 + e_3)$ e $E_2(B) = \text{span}(e_1 + e_2)$. Dunque $\dim(E_1(A)) = \dim(E_1(B)) = 1$.

- (iii) Determinare la forma di Jordan e il polinomio minimo di A e di B , e dire se le matrici A e B siano simili.

RISPOSTA

Le due matrici A e B non sono simili. I polinomi minimi sono $q_A = (t - 1)(t - 2)$ e $q_B = (t - 1)^2(t - 2)$. Le forme di Jordan J_A di A e J_B di B sono

$$J_A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right), \quad J_B = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right).$$

RISOLUZIONE

Infatti, A è diagonalizzabile. Invece B non lo è, perché le molteplicità algebrica e geometrica dell'autovalore 1 non coincidono. Dunque A e B non sono simili.

Essendo A diagonalizzabile, il suo polinomio minimo è $q_A = (t - 1)(t - 2)$. Il polinomio minimo di B divide $p_B = (1 - t)^2(2 - t)$, contiene entrambe le radici di p_B , e non può essere del tipo $(t - 1)(t - 2)$ perché B non è diagonalizzabile. Ne segue che $q_B = (t - 1)^2(t - 2)$.

La forma di Jordan J_A di A è chiaramente diagonale. Invece la forma di Jordan J_B di B è l'unica possibile per una matrice 3×3 non diagonalizzabile con $p_B = (1 - t)^2(2 - t)$.