

# Algebra lineare

ANNO ACCADEMICO 2018/19

## Prova scritta - 4 settembre 2019

Nome: \_\_\_\_\_

Cognome: \_\_\_\_\_

Numero di matricola: \_\_\_\_\_

Canale:      *A-L (Fiorenza-De Concini)*                      *M-Z (Mondello)*

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	8	
2	8	
3	8	
4	8	
Totale	32	

*Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 punti.*

**Verrà corretto solo quello che sarà scritto su queste pagine.**

Voto/30:

**Esercizio 1.** Al variare del parametro  $a \in \mathbb{R}$ , determinare tutti i numeri complessi  $z \in \mathbb{C}$  che soddisfino l'equazione  $iz^7 = |z|^7 + a$ .

**Risoluzione:** La soluzione  $z = 0$  si ha per  $a = 0$ . Per tale valore di  $a$  l'equazione si riduce a  $iz^7 = |z|^7$  e per trovare le altre soluzioni possiamo passare in coordinate polari. Scrivendo  $z = \rho u$  con  $u = e^{i\theta}$  l'equazione si riduce a  $iu^7 = 1$ , ovvero  $u^7 = -i = e^{-\frac{\pi}{2}i}$ . Ne segue  $u = e^{-\frac{\pi}{14}i + \frac{k}{7}\pi i}$  con  $k = 0, 1, 2, \dots, 6$ , mentre  $\rho$  è qualsiasi. Vediamo ora cosa accade per  $a \neq 0$ . Sicuramente non abbiamo la soluzione  $z = 0$  quindi possiamo passare subito in coordinate polari. L'equazione diventa

$$iu^7 = 1 + \frac{a}{\rho^7}$$

Prendendo i moduli da ambo i lati troviamo

$$\left| 1 + \frac{a}{\rho^7} \right| = 1$$

e, dato che  $a$  e  $\rho$  sono reali, questa si riduce alle due equazioni

$$1 + \frac{a}{\rho^7} = 1$$

oppure

$$1 + \frac{a}{\rho^7} = -1.$$

Nel primo caso troviamo  $a = 0$ , contro l'ipotesi  $a \neq 0$ . Nel secondo caso l'equazione che vogliamo risolvere è

$$\rho^7 = -\frac{a}{2}.$$

Dato che  $\rho > 0$  questa non ha soluzione per  $a > 0$ , mentre per  $a < 0$  la soluzione è data da  $\rho = \left(-\frac{a}{2}\right)^{1/7}$ . L'equazione  $iu^7 = 1 + \frac{a}{\rho^7}$  diventa allora

$$iu^7 = -1$$

ovvero  $u^7 = i = e^{\frac{\pi}{2}i}$ , le cui soluzioni sono  $u = e^{\frac{\pi}{14}i + \frac{k}{7}\pi i}$  con  $k = 0, 1, 2, \dots, 6$ . In definitiva, le soluzioni di  $iz^7 = |z|^7 + a$  sono

$$\begin{cases} \text{nessuna soluzione per } a > 0 \\ z = 0 \text{ e } z = \rho e^{-\frac{\pi}{14}i + \frac{k}{7}\pi i} \text{ con } \rho \text{ arbitrario, per } a = 0 \\ z = \left(-\frac{a}{2}\right)^{1/7} e^{\frac{\pi}{14}i + \frac{k}{7}\pi i} \text{ per } a < 0 \end{cases}$$

**Esercizio 2.** Sia  $\mathcal{F}$  lo spazio vettoriale reale di tutte le funzioni da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$ , con le usuali operazioni di somma e prodotto per scalari. Per ogni  $\theta \in \mathbb{R}$ , sia  $f_\theta \in \mathcal{F}$  la funzione definita come  $f_\theta(x) := \text{sen}(x + \theta)$ . Si consideri il seguente sottoinsieme di  $\mathcal{F}$ :

$$\mathcal{S} = \{f_\theta \in \mathcal{F} \mid \theta \in \mathbb{R}\}.$$

- (i) L'insieme  $\mathcal{S}$  è un insieme di vettori linearmente indipendenti di  $\mathcal{F}$ ?
- (ii) L'insieme  $\mathcal{S}$  è un insieme di generatori di  $\mathcal{F}$ ?
- (iii) Detto  $V$  il sottospazio di  $\mathcal{F}$  generato da  $\mathcal{S}$ , qual è la dimensione di  $V$ ?
- (iv) Estrarre da  $\mathcal{S}$  una base di  $V$ .

**Risoluzione:**

- (i) Si ha  $f_0 = f_{2\pi}$ , ovvero la combinazione lineare non banale  $1 \cdot f_0 + (-1) \cdot f_{2\pi}$  di vettori di  $\mathcal{S}$  è nulla. Dunque i vettori di  $\mathcal{S}$  non sono linearmente indipendenti.
- (ii) Tutti gli elementi di  $\mathcal{S}$  sono funzioni limitate, quindi ogni loro combinazione lineare sarà ancora una funzione limitata. Ma  $\mathcal{F}$  contiene anche funzioni non limitate, quindi  $\mathcal{S}$  non genera tutto  $\mathcal{F}$ . Similmente si può argomentare dicendo che tutti gli elementi di  $\mathcal{S}$  sono funzioni periodiche di periodo  $2\pi$ , quindi ogni loro combinazione lineare sarà ancora una funzione periodica di periodo  $2\pi$ . Ma  $\mathcal{F}$  contiene anche funzioni non periodiche, quindi  $\mathcal{S}$  non genera tutto  $\mathcal{F}$ .
- (iii) Osserviamo che

$$f_\theta(x) = \text{sen}(x + \theta) = \text{sen}(x)\cos(\theta) + \cos(x)\text{sen}(\theta) = \cos(\theta)f_0(x) + \text{sen}(\theta)f_{\pi/2}(x),$$

ovvero

$$f_\theta = \cos(\theta)f_0 + \text{sen}(\theta)f_{\pi/2}.$$

Ne segue che tutti gli elementi di  $\mathcal{S}$  sono elementi del sottospazio  $V_0$  generato da  $f_0$  e  $f_{\pi/2}$ , e dunque  $V \subseteq V_0$ . D'altronde  $\{f_0, f_{\pi/2}\} \subseteq \mathcal{S}$  e dunque  $V_0 \subseteq V$ . Ne segue  $V = V_0$ . Infine, i due elementi  $f_0$  e  $f_{\pi/2}$  sono linearmente indipendenti: se  $af_0 + bf_{\pi/2} = 0$ , calcolando in  $x = 0$  troviamo  $b = 0$  e calcolando in  $x = \pi/2$  troviamo  $a = 0$ . Dunque  $\{f_0, f_{\pi/2}\}$  è una base di  $V_0 = V$  e quindi  $\dim V = 2$ .

- (iv) Abbiamo già risolto questo punto risolvendo il punto precedente: una base di  $V$  estratta da  $\mathcal{S}$  è  $\{f_0, f_{\pi/2}\}$ . In effetti, avendo dimostrato che  $\dim V = 2$ , due qualunque elementi linearmente indipendenti di  $\mathcal{S}$  forniscono una base di  $V$ .

**Esercizio 3.** Sia  $\rho : \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$  l'applicazione lineare che manda una matrice  $3 \times 3$  reale nella sua "ruotata" di  $90^\circ$  in senso antiorario, ossia

$$\rho \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} c & f & i \\ b & e & h \\ a & d & g \end{pmatrix}.$$

- (i) Calcolare gli autovalori (reali) di  $\rho$  e determinare basi per i rispettivi autospazi.
- (ii) Dire se  $\rho$  sia diagonalizzabile (su  $\mathbb{R}$ ).
- (iii) Calcolare il polinomio minimo e il polinomio caratteristico di  $\rho$ .

**Risoluzione:**

- (i) Si vede immediatamente che  $\rho^4 = \text{Id}$ , dunque  $\rho$  soddisfa l'equazione  $t^4 - 1 = 0$ . Ne segue che gli autovalori reali di  $\rho$  devono essere radici di quest'equazione. Dato che  $t^4 - 1 = (t-1)(t+1)(t^2+1)$ , vediamo che gli unici autovalori (reali) possibili sono  $\lambda = 1$  e  $\lambda = -1$ . Per verificare se siano effettivamente autovalori impostiamo e risolviamo l'equazione per gli autovettori

$$\rho(M) = \lambda M$$

con  $\lambda = 1$  e  $\lambda = -1$ . Questo ci fornirà inoltre le basi per gli autospazi. Per  $\lambda = 1$  l'equazione da risolvere è

$$\begin{pmatrix} c & f & i \\ b & e & h \\ a & d & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

che ha come soluzione

$$\begin{cases} a = s \\ b = t \\ c = s \\ d = t \\ e = u \\ f = t \\ g = s \\ h = t \\ i = s \end{cases}$$

con  $s, t, u \in \mathbb{R}$ . Dunque  $\lambda = 1$  è effettivamente un autovalore e una base del relativo autospazio è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Similmente si vede che anche  $\lambda = -1$  è un autovalore e che una base del relativo autospazio è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

- (ii) La somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali è

$$m_g(1) + m_g(-1) = 3 + 2 = 5 < 9 = \dim \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R}),$$

dunque  $\rho$  non è diagonalizzabile.

(iii) Dato che  $\rho$  annulla il polinomio  $t^4 - 1$  il polinomio minimo di  $\rho$  divide  $t^4 - 1$ . Inoltre  $\lambda = 1$  e  $\lambda = -1$  sono autovalori di  $\rho$  e quindi sono radici del polinomio minimo. Ne segue che  $(t - 1)(t + 1)$  divide il polinomio minimo. Abbiamo allora solo due possibilità: o il polinomio minimo di  $\rho$  è  $t^2 - 1$  oppure è  $t^4 - 1$ . Dato che  $\rho^2 \neq \text{Id}$ , il polinomio minimo non è  $t^2 - 1$  e dunque  $m_\rho(t) = t^4 - 1$ . Per determinare il polinomio caratteristico di  $\rho$  osserviamo innanzi tutto che da  $m_\rho(t) = t^4 - 1$  segue

$$\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R}) = V_1 \oplus V_{-1} \oplus \ker(\rho^2 + 1),$$

dove  $V_\lambda$  indica l'autospazio relativo all'autovalore  $\lambda$ . La decomposizione scritta sopra è una decomposizione in sottospazi  $\rho$ -stabili. Inoltre il polinomio caratteristico della restrizione di  $\rho$  a  $V_\lambda$  è  $(\lambda - t)^{\dim V_\lambda}$ , mentre il polinomio caratteristico della restrizione di  $\rho$  a  $\ker(\rho^2 + 1)$  è  $(t^2 + 1)^k$  per qualche  $k \geq 1$  (dato che il polinomio minimo di questa restrizione è proprio  $t^2 + 1$ ). Pertanto il polinomio caratteristico di  $\rho$  è

$$p_\rho(t) = -(t - 1)^3(t + 1)^2(t^2 + 1)^k$$

per qualche  $k$ . Dato che  $p_\rho(t)$  ha grado uguale a  $\dim \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R}) = 9$  vediamo che deve essere  $k = 2$ , ovvero

$$p_\rho(t) = -(t - 1)^3(t + 1)^2(t^2 + 1)^2.$$

Alternativamente, tutto l'esercizio può essere facilmente risolto scrivendo la matrice  $9 \times 9$  che rappresenta l'endomorfismo  $\rho$  rispetto alla base canonica di  $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ .

**Esercizio 4.** Al variare dei parametri  $a, k \in \mathbb{R}$ , considerare il sistema lineare

$$(\star) \begin{cases} 3y + (5k + 1)z = a - k \\ -3x - (6k + 6)y = -3 \\ 2x + (5 + 4k)y + 2kz = 2 \end{cases}$$

nelle incognite  $x, y, z \in \mathbb{R}$ .

- (i) Al variare di  $a, k \in \mathbb{R}$ , determinare se il sistema lineare  $(\star)$  abbia un'unica soluzione, infinite soluzioni oppure nessuna soluzione.
- (ii) Per quei valori di  $a, k$  per cui  $(\star)$  ha infinite soluzioni, dare una parametrizzazione dello spazio delle soluzioni.
- (iii) Dire se  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  sia soluzione del sistema  $(\star)$  per qualche valore di  $a, k \in \mathbb{R}$ .

**Risoluzione:**

- (i) Riscriviamo il sistema lineare come  $AX = b$ , dove

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5k + 1 \\ -3 & -6k - 6 & 0 \\ 2 & 5 + 4k & 2k \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} a - k \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Sia quindi  $\hat{A} = (A|b)$  la matrice completata, ossia

$$\hat{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 5k + 1 & a - k \\ -3 & -6k - 6 & 0 & -3 \\ 2 & 5 + 4k & 2k & 2 \end{array} \right).$$

Operiamo sulle righe di  $\hat{A}$  per ridurre la parte sinistra a scala

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 5k + 1 & a - k \\ -3 & -6k - 6 & 0 & -3 \\ 2 & 5 + 4k & 2k & 2 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} -3 & -6k - 6 & 0 & -3 \\ 2 & 5 + 4k & 2k & 2 \\ 0 & 3 & 5k + 1 & a - k \end{array} \right) \rightsquigarrow \\ &\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2k + 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 + 4k & 2k & 2 \\ 0 & 3 & 5k + 1 & a - k \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2k + 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2k & 0 \\ 0 & 3 & 5k + 1 & a - k \end{array} \right) \rightsquigarrow \\ &\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2k + 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 1 - k & a - k \end{array} \right) =: \hat{A}' \end{aligned}$$

Esaminando  $\hat{A}'$  e applicando Rouché-Capelli, otteniamo tre casi:

- (1) se  $k \neq 1$ , allora  $\hat{A}$  ha rango 3 e dunque il sistema ha un'unica soluzione (che si ottiene come  $X = A^{-1}b$ );
  - (2) se  $k = 1$  e  $a \neq 1$ , allora  $A$  ha rango 2 e  $b \notin \text{Im}(L_A)$  e dunque il sistema non ha soluzioni;
  - (3) se  $k = 1$  e  $a = 1$ , allora  $A$  ha rango 2 e  $b \in \text{Im}(L_A)$  e dunque il sistema ha infinite soluzioni.
- (ii) Siamo nel caso in cui  $k = a = 1$ . Il sistema in questo caso è  $AX = b$  con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ossia

$$\begin{cases} x + 4y = 1 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

Avendo  $L_A$  nucleo di dimensione 1, le soluzioni saranno descritte da un unico parametro  $t \in \mathbb{R}$ . Poniamo  $z = t$  e risolvendo otteniamo  $y = -2t$  e  $x = 1 - 4y = 1 + 8t$ . Quindi lo spazio delle soluzioni del sistema è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 + 8t \\ 4t \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(iii) Riprendiamo  $A, b$  come in (i), che dipendono dai parametri  $a, k$ . Per verificare se  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  sia

soluzione di  $AX = b$ , semplicemente calcoliamo

$$AX = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5k + 1 \\ -3 & -6k - 6 & 0 \\ 2 & 5 + 4k & 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5k + 3 \\ -6k - 9 \\ 6k + 7 \end{pmatrix}.$$

ed eguagliamo tale vettore a  $b$ , ottenendo il sistema

$$(\diamond) \begin{cases} 5k + 3 = a - k \\ -6k - 9 = -3 \\ 6k + 7 = 2 \end{cases}$$

Le soluzioni  $(a, k)$  del sistema  $(\diamond)$  corrispondono ai valori dei parametri per i quali  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  è soluzione di  $(\star)$ .

Sommando le ultime due righe del sistema  $(\diamond)$ , otteniamo l'equazione  $-2 = -1$ , che chiaramente non ha soluzione. Pertanto  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  non è soluzione del sistema  $(\star)$  per alcun valore di  $(a, k)$ .