Geometria I, a.a. 2016/17
Primo esonero - Compito 1

Soluzioni (ovviamente infiniti altri svolgimenti corretti sono possibili)

(1) Sia V lo spazio vettoriale reale delle matrici 2×2 a coefficienti reali. Si consideri l'applicazione $Q\colon V \to \mathbb{R}$ definita da $Q(A) = \mathrm{tr}(A^2) + (\mathrm{tr}(A))^2$.

- dimostrare che Q è una forma quadratica;
- determinare rango e segnatura di Q
- determinare una base Q-ortogonale di V.

Soluzione. Scriviamo

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

per il generico elemento dello spazio vettoriale V. Nelle coordinate a, b, c, d l'applicazione Q è data da

$$\begin{aligned} Q(A) &= \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\right) + \left(\mathrm{tr}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\right)^2 \\ &= \mathrm{tr}\begin{pmatrix} a^2 + bc & * \\ * & bc + d^2 \end{pmatrix} + (a+d)^2 \\ &= 2a^2 + 2bc + 2ad + 2d^2 \end{aligned}$$

L'applicazione Q è un polinomio omogeneo di secondo grado nelle coordinate a, b, c, d e quindi è una forma quadratica su V. La matrice che rappresenta la forma quadratica Q nella base canonica dello spazio V delle matrici 2×2 (ovvero la base rispetto alla quale a, b, c, d sono coordinate) è

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Mettiamo Q in forma diagonale utilizzando l'algoritmo di Lagrange: questo ci darà in una volta sola rango, segnatura ed una base Q-ortogonale. Il primo cambio di coordinate è rappresentato dalla matrice

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dopo questo cambio di coordinate la matrice che rappresenta la forma quadratica diventa

$$\begin{aligned} Q_1 = {}^tP_1 Q P_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Il secondo cambio di coordinate è rappresentato dalla matrice

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dopo questo cambio di coordinate la matrice che rappresentta la forma quadratica diventa

$$Q_2 = {}^tP_2 Q_1 P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Il terzo (e ultimo) cambio di coordinate è rappresentato dalla matrice

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dopo questo cambio di coordinate la matrice che rappresentta la forma quadratica diventa

$$Q_3 = {}^tP_3 Q_2 P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Da questo vediamo che il rango di Q è 4 e che $n_+ = 3$ e $n_= - 1$. Infine una base Q-ortogonale è data dalle colonne del cambio di coordinate complessivo

$$P_1 P_2 P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Più precisamente, la base Q-ortogonale ottenuta in questo modo è data dalle quattro matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Come verifica osserviamo che, ponendo

$$a = \alpha - \frac{1}{2}\delta, \qquad b = \beta - \frac{1}{2}\gamma, \qquad c = \beta + \frac{1}{2}\gamma, \qquad d = \delta$$

si trova

$$\begin{aligned} 2a^2 + 2bc + 2ad + 2d^2 &= 2(\alpha - \frac{1}{2}\delta)^2 + 2(\beta - \frac{1}{2}\gamma)(\beta + \frac{1}{2}\gamma) + 2(\alpha - \frac{1}{2}\delta)\delta + 2\delta^2 \\ &= 2\alpha^2 + 2\beta^2 - \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{3}{2}\delta^2 \end{aligned}$$

(2) In $\mathbb{C}^2$ dotato del prodotto Hermitiano standard, si consideri il sottospazio vettoriale W definito da

$$W = \{\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \text{ tali che } z + i\,w = 0\}$$

Scrivere la matrice che rappresenta la proiezione ortogonale π_W rispetto alla base canonica di $\mathbb{C}^2$.

Soluzione. Se il vettore $\mathbf{e}$ costituisce una base ortonormale di W, allora la proiezione ortogonale su W si scrive

$$\pi_W : v \mapsto \mathbf{e}\langle \mathbf{e}|v\rangle.$$

Se $\mathbf{f}$ è un qualunque vettore non nullo di W, il vetttore normalizzato $\mathbf{f}/\|\mathbf{f}\|$ è una base ortonormale di W e dunque la proiezione ortogonale su W si scrive

$$\pi_W : v \mapsto \frac{1}{\|\mathbf{f}\|^2}\mathbf{f}\langle \mathbf{f}|v\rangle,$$

ovvero, in coordinate rispetto alla base canonica di $\mathbb{C}^2$,

$$\pi_W = \frac{1}{\|\mathbf{f}\|^2}\mathbf{f}\,{}^t\overline{\mathbf{f}}.$$

resta solo da determinare un vettore non nullo di W. Si vede immediatamente che un tale vettore è, ad esempio,

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Dunque

$$\pi_W = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

(3) In $\mathbb{R}^3$ dotato dell'usuale prodotto scalare si consideri l'applicazione lineare $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rappresentata, rispetto alla base canonica, dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & -1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

- dimostrare che φ è un elemento di $SO(3)$;
- determinare due piani V e W di $\mathbb{R}^3$ tali che, dette S_V e S_W le riflessioni rispetto a V e W rispettivamente, si abbia $\varphi = S_V \circ S_W$.

Soluzione. Per verificare che φ sia un elemento di $SO(3)$ basta calcolare

$${}^tA\,A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{aligned}
\det A &= \frac{1}{27}\det\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{27}\det\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{9}\det\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{9}\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = 1
\end{aligned}$$

Determiniamo ora l'asse di rotazione di φ ovvero l'1-autospazio di φ. Si ha (mediante eliminazione di Gauss)

$$\begin{aligned}
\ker(\varphi - \mathrm{Id}) &= \ker\begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 & -1/3 \\ 2/3 & 2/3 & 2/3 \\ -1/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

da cui otteniamo immediatamente che una base del nucleo di $\varphi - \mathrm{Id}$, ovvero una base dell'asse di rotazione, è data dal vettore

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Sia ora $\mathbf{v}_0$ un vettore non appartenente all'asse di rotazione, e sia $\mathbf{w} = \varphi(\mathbf{v}_0) - \mathbf{v}_0$. Notiamo che poiché $\mathbf{v}_0$ non appartiene all'asse di rotazione si ha $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$. Sia V il piano ortogonale a $\mathbf{w}$ e sia S_V la riflessione rispetto a questo piano. Osserviamo che

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{v}|\mathbf{w}\rangle &= \langle \mathbf{v}|\varphi(\mathbf{v}_0) - \mathbf{v}_0\rangle \\
&= \langle \mathbf{v}|\varphi(\mathbf{v}_0)\rangle - \langle \mathbf{v}|\mathbf{v}_0\rangle \\
&= \langle \varphi(\mathbf{v})|\varphi(\mathbf{v}_0)\rangle - \langle \mathbf{v}|\mathbf{v}_0\rangle \\
&= \langle \mathbf{v}|\mathbf{v}_0\rangle - \langle \mathbf{v}|\mathbf{v}_0\rangle = 0,
\end{aligned}$$

dove si è usato che $\mathbf{v}$ viene fissato da φ e il fatto che φ è una isometria. Dunque $\mathbf{v}$ è un elemento di V e quindi

$$S_V(\varphi(\mathbf{v})) = S_V(\mathbf{v}) = \mathbf{v}.$$

Scriviamo ora

$$\varphi(\mathbf{v}_0) = \frac{1}{2}(\varphi(\mathbf{v}_0) - \mathbf{v}_0) + \frac{1}{2}(\varphi(\mathbf{v}_0) + \mathbf{v}_0).$$

Il vettore $\frac{1}{2}(\varphi(\mathbf{v}_0) - \mathbf{v}_0)$ è $\frac{1}{2}\mathbf{w}$ e dunque è un elemento di $\mathbf{w}^{\perp\perp} = V^{\perp}$. Per quanto riguarda il vettore $\frac{1}{2}(\varphi(\mathbf{v}_0) + \mathbf{v}_0)$, invece, si ha

$$\begin{aligned}
\langle \frac{1}{2}(\varphi(\mathbf{v}_0) + \mathbf{v}_0)|\mathbf{w}\rangle &= \frac{1}{2}\langle \varphi(\mathbf{v}_0) + \mathbf{v}_0|\varphi(\mathbf{v}_0) - \mathbf{v}_0\rangle \\
&= \langle \mathbf{v}|\varphi(\mathbf{v}_0)\rangle - \langle \mathbf{v}|\mathbf{v}_0\rangle \\
&= \langle \varphi(\mathbf{v}_0)|\varphi(\mathbf{v}_0)\rangle - \langle \varphi(\mathbf{v}_0)|\mathbf{v}_0\rangle + \langle \mathbf{v}_0|\varphi(\mathbf{v}_0)\rangle - \langle \mathbf{v}|\mathbf{v}_0\rangle = 0,
\end{aligned}$$

usando la simmetria del prodotto scalare e di nuovo il fatto che φ è una isometria. Dunque $\frac{1}{2}(\varphi(\mathbf{v}_0) + \mathbf{v}_0)$ sta in V e quindi la decomposizione di $\varphi(\mathbf{v}_0)$ come

$$\varphi(\mathbf{v}_0) = \frac{1}{2}(\varphi(\mathbf{v}_0) - \mathbf{v}_0) + \frac{1}{2}(\varphi(\mathbf{v}_0) + \mathbf{v}_0).$$

è proprio la sua decomposizione in un vettore in $V^\perp$ ed un vettore in V. Ne segue che

$$S_V(\varphi(\mathbf{v}_0)) = -\frac{1}{2}(\varphi(\mathbf{v}_0) - \mathbf{v}_0) + \frac{1}{2}(\varphi(\mathbf{v}_0) + \mathbf{v}_0) = \mathbf{v}_0$$

Abbiamo dunque che l'isometria $S_V \circ \varphi$ fissa i due vettori linearmente indipendenti $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}_0$. Avendo determinante -1 non può fissare un terzo vettore linearmente indipendente da questi (sarebbe l'identità) e quindi è la riflessione rispetto al piano W generato da $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}_0$. Vale a dire,

$$S_V \circ \varphi = S_W,$$

da cui, moltiplicando a sinistra ambo i termini per S_V,

$$\varphi = S_V \circ S_W.$$

Per trovare due piani V e W espliciti basta scegliere un vettore $\mathbf{v}_0$ non appartenente alla retta generata dal vettore $\mathbf{v}$ scritto sopra. Ad esempio possiamo prendere

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con questa scelta si ha

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

Troviamo quindi che possiamo prendere come V e W i piani di equazione, rispettivamente, $x - 2y + z = 0$ e $y = 0$.