

# Algebra lineare

ANNO ACCADEMICO 2018/19

## Prova scritta - 22 gennaio 2019

Nome: \_\_\_\_\_

Cognome: \_\_\_\_\_

Numero di matricola: \_\_\_\_\_

Canale: *A-L (Fiorenza-De Concini)*

*M-Z (Mondello)*

*Esame completo*

*Secondo esonero (solo esercizi 3-4)*

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	8	
2	8	
3	8	
4	8	
Totale	32	

*Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 punti.*

*Verrà corretto solo quello che sarà scritto su queste pagine.*

Voto/30:

**Esercizio 1.** (a) Determinare gli  $z \in \mathbb{C}$  che soddisfino  $z(z-2) = z + \bar{z}$ .

(b) Siano  $p_1 = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$  e  $p_2 = x^3 - 5x^2 + 8x - 6$  sono polinomi reali in  $x$ .  
Calcolare il MCD( $p_1, p_2$ ).

**Risoluzione:**

(a) Scriviamo  $z = x + iy$  con  $x$  ed  $y$  reali. Allora l'equazione da risolvere è

$$(x + iy)(x + iy - 2) = x + iy + x - iy$$

ovvero

$$x^2 - 2x - y^2 + i(2xy - 2y) = 2x.$$

Quest'equazione è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x^2 - 2x - y^2 = 2x \\ 2xy - 2y = 0 \end{cases}$$

ovvero a

$$\begin{cases} x^2 - 4x - y^2 = 0 \\ (x-1)y = 0 \end{cases}$$

Da qui ricaviamo i due sistemi

$$\begin{cases} x^2 - 4x - y^2 = 0 \\ x = 1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x^2 - 4x - y^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} -3 - y^2 = 0 \\ x = 1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x^2 - 4x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Il primo sistema non ha soluzioni con  $y$  reale, mentre il secondo sistema ha le due soluzioni  $(x, y) = (0, 0)$  e  $(x, y) = (4, 0)$ , corrispondenti ai due numeri complessi  $z = 0$  e  $z = 4$ .

(b) Utilizziamo l'algoritmo euclideo delle divisioni successive. Si ha

$$x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = (x^3 - 5x^2 + 8x - 6) + (2x^2 - 4x + 4) = (x^3 - 5x^2 + 8x - 6) + 2(x^2 - 2x + 2)$$

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 6 = (x-3)(x^2 - 2x + 2)$$

Abbiamo finito: il massimo comun divisore tra  $p_1$  e  $p_2$  è  $x^2 - 2x + 2$ .

Alternativamente si possono fattorizzare  $p_1$  e  $p_2$  in irriducibili in  $\mathbb{R}[x]$  trovando

$$x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = (x-1)(x^2 - 2x + 2); \quad x^3 - 5x^2 + 8x - 6 = (x-3)(x^2 - 2x + 2)$$

e ricavare da qui che il massimo comun divisore tra  $p_1$  e  $p_2$  è  $x^2 - 2x + 2$ .

**Esercizio 2.** Sia  $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$  lo spazio vettoriale reale dei polinomi in  $x$  di grado al più 3 e si considerino i seguenti sottoinsiemi di  $V$ :

$$W_1 = \{p \in V \mid p \text{ non ha radici negative}\}, \quad W_2 = \{p \in V \mid p(x-1) + p(x+1) = 2p(x)\}.$$

- (i) Determinare se ciascun  $W_i$  sia un sottospazio vettoriale di  $V$ .  
(ii) Determinare una base di quei  $W_i$  che sono sottospazi vettoriali di  $V$ .

**Risoluzione:**

- (i) Il sottoinsieme  $W_1$  non è un sottospazio di  $V$ . Infatti il polinomio  $p(x) = -x + 2$  e il polinomio  $q(x) = 2x - 1$  sono elementi di  $W_1$  (non hanno radici negative) ma la loro somma è il polinomio  $p(x) + q(x) = x + 1$  che ha la radice negativa  $x = -1$ . Ovviamente sono possibili infiniti altri controesempi.

Il sottoinsieme  $W_2$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ . Infatti se  $p$  e  $q$  sono elementi di  $W_2$  si ha

$$\begin{aligned} (p+q)(x-1) + (p+q)(x+1) &= p(x-1) + q(x-1) + p(x+1) + q(x+1) \\ &= p(x-1) + p(x+1) + q(x-1) + q(x+1) \\ &= 2p(x) + q(x) \\ &= 2(p(x) + q(x)) \\ &= 2(p+q)(x). \end{aligned}$$

Dunque  $p+q$  appartiene a  $W_2$ . Inoltre se  $p$  appartiene a  $W_2$  e  $\alpha$  è un numero reale, si ha

$$\begin{aligned} (\alpha p)(x-1) + (\alpha p)(x+1) &= \alpha p(x-1) + \alpha p(x+1) \\ &= \alpha(p(x-1) + p(x+1)) \\ &= \alpha(2p(x)) \\ &= 2\alpha p(x) \\ &= 2(\alpha p)(x). \end{aligned}$$

Dunque  $\alpha p$  appartiene a  $W_2$ .

Per determinare una base di  $W_2$ , scriviamo  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ . L'equazione che definisce  $W_2$  è allora

$$a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + a_3(x-1)^3 + a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2 + a_3(x+1)^3 = 2(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)$$

ovvero

$$2a_2 + (6a_3)x = 0,$$

che corrisponde al sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} 2a_2 = 0 \\ 6a_3 = 0 \end{cases}$$

nelle variabili  $a_0, a_1, a_2, a_3$ . Osserviamo che aver identificato  $W_2$  con l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo nelle coordinate  $a_0, a_1, a_2, a_3$  relative alla base canonica  $(1, x, x^2, x^3)$  di  $V$  è una seconda dimostrazione del fatto che  $W_2$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ . Le soluzioni del sistema che definisce  $W_2$  sono evidentemente

$$\begin{cases} a_0 = s \\ a_1 = t \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

con  $s, t$  numeri reali arbitrari. Una base è data dunque dai due vettori di coordinate

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica  $(1, x, x^2, x^3)$  di  $V$ , ovvero dai due polinomi  $1$  e  $x$ .

**Esercizio 3.** Considerare lo spazio vettoriale reale  $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$  delle matrici  $3 \times 3$  reali e l'applicazione lineare  $f : \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$  definita come  $f(A) := A - 4A^T$ .

- (i) Determinare autovalori e autospazi di  $f$ .
- (ii) Determinare le molteplicità geometriche degli autovalori di  $f$  e dire se  $f$  sia diagonalizzabile.
- (ii) Determinare polinomi caratteristico e minimo di  $f$ .

**Risoluzione:**

- (i) Il modo più elegante di risolvere questo esercizio è probabilmente osservare che se scriviamo  $g : \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$  per l'applicazione lineare data da  $g(A) = A^T$ , allora abbiamo  $f = \text{Id} - 4g$ . L'equazione  $f(A) = \lambda A$  è allora equivalente a  $A - 4g(A) = \lambda(A)$ , ovvero a

$$g(A) = \frac{1 - \lambda}{4}A.$$

In altre parole  $\lambda$  è un autovalore di  $f$  se e solo se  $(1 - \lambda)/4$  è un autovalore di  $g$ . Ma gli autovalori di  $g$  li conosciamo: dato che  $g$  è la trasposizione,  $g^2 = \text{Id}$  e il polinomio minimo di  $g$  è proprio  $t^2 - 1$ . Dunque gli autovalori di  $f$  sono dati dalle soluzioni delle equazioni

$$\frac{1 - \lambda}{4} = 1 \quad ; \quad \frac{1 - \lambda}{4} = -1$$

ovvero sono

$$\lambda = -3 \quad \text{e} \quad \lambda = 5.$$

Inoltre l'autospazio per  $f$  relativo all'autovalore  $-3$  coinciderà, per quanto osservato, con l'autospazio per  $g$  relativo all'autovalore 1, ovvero allo spazio delle matrici simmetriche  $3 \times 3$ , mentre l'autospazio per  $f$  relativo all'autovalore 5 coinciderà con l'autospazio per  $g$  relativo all'autovalore  $-1$ , ovvero allo spazio delle matrici antisimmetriche  $3 \times 3$ .

Altrimenti si può andare di forza bruta: in termini della base canonica dello spazio delle matrici, data da

$$\begin{aligned} E_1^1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; & E_1^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; & E_1^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ E_2^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; & E_2^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; & E_2^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ E_3^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; & E_3^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; & E_3^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned} f(E_1^1) &= -3E_1^1; & f(E_1^2) &= E_1^2 - 4E_2^1; & f(E_1^3) &= E_1^3 - 4E_3^1; \\ f(E_2^1) &= E_2^1 - 4E_1^1; & f(E_2^2) &= -3E_2^2; & f(E_2^3) &= E_2^3 - 4E_3^2; \\ f(E_3^1) &= E_3^1 - 4E_1^3; & f(E_3^2) &= E_3^2 - 4E_2^2; & f(E_3^3) &= -3E_3^3; \end{aligned}$$

ed è dunque rappresentata rispetto alla base canonica di  $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$  dalla matrice

$$M = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico si calcola facilmente permutando un po' di righe e colonne:

$$\begin{aligned}
 p_M(t) &= \det \begin{pmatrix} -3-t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3-t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-t & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3-t \end{pmatrix} \\
 &= \det \begin{pmatrix} -3-t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1-t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-t & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1-t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3-t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-t & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3-t \end{pmatrix} \\
 &= (-3-t)^3 \left( \det \begin{pmatrix} 1-t & -4 \\ -4 & 1-t \end{pmatrix} \right)^3 \\
 &= -(t+3)^3 (t^2 - 2t - 15)^3 \\
 &= -(t+3)^6 (t-5)^3
 \end{aligned}$$

dalla quale ritroviamo gli autovalori  $-3$  e  $5$ . Osserviamo che il polinomio caratteristico di  $M$  ha tutte le sue radici nel campo. Vediamo anche che le molteplicità algebriche sono 6 e 3 rispettivamente. L'autospazio relativo all'autovalore  $-3$  è dato da

$$\ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Riducendo a scala con il metodo di Gauss si vede rapidamente che questo è

$$\ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha rango 3, e dunque l'autovalore  $-3$  ha molteplicità geometrica 6 (coincidente con la sua molteplicità algebrica). Una base dello spazio delle soluzioni è data dai vettori che hanno

coordinate rispetto alla base canonica date da

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

ovvero dalle seguenti matrici  $3 \times 3$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si tratta evidentemente della base dello spazio delle matrici simmetriche  $3 \times 3$ . L'autospazio relativo all'autovalore 5 è dato da

$$\ker \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Riducendo a scala con il metodo di Gauss si vede rapidamente che questo è

$$\ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha rango 6, e dunque l'autovalore 5 ha molteplicità geometrica 3 (coincidente con la sua molteplicità algebrica). Ne deduciamo in particolare che l'endomorfismo  $f$  è diagonalizzabile. Una base dello spazio delle soluzioni è data dai vettori che hanno coordinate rispetto alla base canonica date da

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

ovvero dalle seguenti matrici  $3 \times 3$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si tratta evidentemente della base dello spazio delle matrici antisimmetriche  $3 \times 3$ .

- Se abbiamo risolto elegantemente il primo punto, allora la molteplicità geometrica dell'autovalore  $-3$  è la dimensione dello spazio delle matrici simmetriche  $3 \times 3$ , ovvero  $3 + 2 + 1 = 6$ , mentre la molteplicità geometrica dell'autovalore  $5$  è la dimensione dello spazio delle matrici antisimmetriche  $3 \times 3$ , ovvero  $2 + 1 = 3$ . Indicati con  $V_{-3}$  e  $V_5$  i due autospazi abbiamo dunque

$$\dim(V_{-3} \oplus V_5) = \dim V_{-3} + \dim V_5 = 6 + 3 = 9 = \dim \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$$

Dunque

$$\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R}) = V_{-3} \oplus V_5,$$

ovvero  $f$  è diagonalizzabile.

Se abbiamo risolto il primo punto di forza bruta, invece, già abbiamo ricavato tutte le risposte per questo secondo punto.

- Se abbiamo risolto elegantemente il primo punto, allora le informazioni che abbiamo fino a questo punto sono che  $f$  è diagonalizzabile e che gli autospazi sono  $V_{-3}$  e  $V_5$  di dimensioni  $6$  e  $3$  rispettivamente. Ne ricaviamo quindi che

$$p_f(t) = -(t+3)^6(t-5); \quad m_f(t) = (t+3)(t-5).$$

Se invece siamo andati di forza bruta, allora già sappiamo quale sia il polinomio caratteristico e ricaviamo il polinomio minimo dal sapere che  $f$  è diagonalizzabile.



**Esercizio 4.** Sia  $A \in \mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{R})$  la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

- (i) Calcolare gli autovalori di  $A$ , le loro molteplicità algebriche, il polinomio caratteristico  $p_A$  e dire se  $A$  sia triangolabile.
- (ii) Determinare le dimensioni degli autospazi e degli autospazi generalizzati di  $A$  e dire se  $A$  sia diagonalizzabile.
- (iii) Calcolare il polinomio minimo di  $A$  e determinare la forma di Jordan di  $A$ .
- (iv) Determinare una base di Jordan per  $A$ .

**Risoluzione:**

- (i) Il polinomio caratteristico di  $A$  è

$$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} 4-t & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5-t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5-t & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4-t \end{pmatrix} = (4-t)^2 \det \begin{pmatrix} 5-t & 1 \\ 1 & 5-t \end{pmatrix} = (t-4)^3(t-6)$$

Gli autovalori di  $A$  sono pertanto 4 e 6, con molteplicità algebriche 3 e 1 rispettivamente. Osserviamo che il polinomio caratteristico di  $A$  ha tutte le sue radici nel campo, e quindi  $A$  è triangolabile.

- (ii) Le dimensioni degli autospazi di  $A$  sono

$$\dim V_4 = 4 - \text{rango} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 - \text{rango} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

e

$$\dim V_6 = 1$$

(in questo caso non occorre fare calcoli dato che l'autovalore 6 ha molteplicità algebrica 1). Dato che la molteplicità geometrica dell'autovalore 4 è minore della corrispondente molteplicità algebrica,  $A$  non è diagonalizzabile. Le dimensioni degli autospazi generalizzati si leggono immediatamente dal polinomio caratteristico di  $A$ . Abbiamo

$$\dim V_4^{(\infty)} = 3; \quad \dim V_6^{(\infty)} = 1.$$

- (iii) Calcoliamo i diagrammi di Young relativi agli autovalori 4 e 6. Da quel che abbiamo già calcolato sappiamo che il diagramma di Young relativo all'autovalore 4 deve avere 3 quadretti e che la sua prima riga ha 2 quadretti. Si tratta quindi del diagramma di Young



Da questo leggiamo che la molteplicità algebrica dell'autovalore 4 nel polinomio minimo di  $A$  è 2. Il diagramma di Young relativo all'autovalore 6 è invece immediato: si tratta del diagramma di Young



Il polinomio minimo di  $A$  è pertanto  $m_A(t) = (t - 4)^2(t - 6)$  e la forma di Jordan di  $A$  è

$$J_A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

(iv) Numeriamo le caselle del diagramma di Young relativo all'autovalore 4:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$$

Da quanto calcolato fin qui l'unica cosa non banale da fare per esplicitare una base di Jordan è esibire un vettore  $e_2$  in  $V_4^{(2)} = \ker((A - 4\text{Id})^2)$  tale che  $[e_2]$  sia una base di  $V_4^{(2)}/V_4^{(1)}$ . Dato che  $\dim V_4^{(2)}/V_4^{(1)} = 1$  ci basta trovare un vettore  $e_2$  in  $V_4^{(2)}$  tale che  $[e_2] \neq [0]$ , ovvero un vettore  $e_2$  di  $\mathbb{R}^4$  tale che  $e_2 \in \ker((A - 4\text{Id})^2)$  ma  $e_2 \notin \ker(A - 4\text{Id})$ . Si ha

$$A - 4\text{Id} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$(A - 4\text{Id})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Come vettore  $e_2$  possiamo quindi prendere il vettore

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Il vettore  $e_1$  sarà allora

$$e_1 = (A - 4\text{Id})e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Come vettore  $e_3$  dobbiamo scegliere un vettore di  $V_4^{(1)} = V_4$  che completi  $e_1$  a una base di  $V_4$ . Dato che una base di

$$V_1 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è data dai due vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

quindi possiamo prendere

$$e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Infine come  $e_4$  dobbiamo prendere una base di  $V_6$ . Poiché

$$V_6 = \ker \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

possiamo prendere

$$e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Una base di Jordan per  $A$  è dunque data dalla seguente quaterna ordinata di vettori di  $\mathbb{R}^4$ :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$