Tre esercizi svolti

1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ dotato delle coordinate (x, y, z) sia U is sottospazio vettoriale generato dai due vettori

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad ; \qquad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Determinare equazioni cartesiane per U.

Svolgimento. Per definizione di U, il vettore $\vec{v}$ di $\mathbb{R}^3$ appartiene al sottospazio U se e solo se $\vec{v} \in \operatorname{span}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, e quindi se e solo se $\operatorname{span}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{v}\} = \operatorname{span}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. In altre parole $\vec{v} \in U$ se e solo se $\vec{v}$ si può eliminare dal sistema di generatori $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{v}\}$ per U. Posta così, la questione si risolve immediatamente con l'algoritmo di Gauss-Jordan. Scrivendo

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

troviamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & -1 & y \\ 3 & 1 & z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & -1 & y-2x \\ 0 & 1 & z-3x \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 2x-y \\ 0 & 1 & -3x+z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 2x-y \\ 0 & 0 & -5x+y+z \end{pmatrix}$$

Abbiamo finito: affinche la terza colonna (e dunque il vettore $\vec{v}$) sia trascurabile occorre e basta che si abbia $-5x + y + z = 0$. Questa è l'equazione cartesiana cercata. Come riprova, si verifica immediatamente che sia le coordinate di $\vec{e}_1$ che quelle di $\vec{e}_2$ la soddisfano.

2. Sia $L_A \colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

(rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{Q}^2$ e di $\mathbb{Q}^3$. Determinare equazioni cartesiane per l'immagine di L_A.

Svolgimento. Ci si riconduce immediatamente allo svolgimento dell'esercizio precedente ricordando che l'immagine di L_A è generata dalle colonne della matrice A. Abbiamo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & x \\ -2 & -1 & y \\ 4 & 2 & z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2\,x \\ -2 & -1 & y \\ 4 & 2 & z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2x \\ 0 & 0 & y-x \\ 0 & 0 & z-2x \end{pmatrix}$$

Abbiamo finito: da questa riduzione a scala leggiamo subito che la seconda colonna è eliminabile (cosa che si poteva vedere anche a occhio: è 1/2 per la prima) e che la terza colonna (che è quella che ci interessa) è eliminabile se e solo se

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$$

Questo sistema sono le equazioni cartesiane cercate.

3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ siano U e W i sottospazi definiti da

$$U = \operatorname{span}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}, \qquad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$W = \operatorname{span}\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}, \qquad \vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Determinare una base del sottospazio $U \cap W$.

Svolgimento. Un vettore $\vec{v}$ di $\mathbb{R}^3$ appartiene a $U \cap W$ se e solo se appartiene sia al sottospazio generato da $\vec{e}_1$ ed $\vec{e}_2$ che a quello generato da $\vec{f}_1$ ed $\vec{f}_2$. Dunque se e solo se esistono numeri reali x, y, z, t tali che

$$\begin{cases} \vec{v} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \\ \vec{v} = z\vec{f}_1 + t\vec{f}_2 \end{cases}$$

Da qui ricaviamo l'equazione

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 - z\vec{f}_1 - t\vec{f}_2 = \vec{0}$$

Risolvere quest'equazione equivale a risolvere il sistema lineare rappresentato in forma matriciale da

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Applicando l'algoritmo di Gauss troviamo

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Dunque la soluzione del sistema è

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$$

con t arbitrario, ovvero

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \\ t = \lambda \end{cases}$$

da cui si vede che una base per lo spazio delle soluzioni è

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da qui ricaviamo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e dunque

$$\vec{v} = 0\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

è una base di $U \cap W$.

Come riprova, osserviamo che la soluzione del sistema ci dice anche

$$\begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e dunque

$$\vec{v} = -1\vec{f}_1 + 1\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

che è esattamente il vettore trovato in precedenza.

Un altro modo di risolvere questo esercizio è il seguente. Per prima cosa troviamo equazioni cartesiane per U e per W come negli esercizi precedenti. Si trova subito che un'equazione cartesiana per U è $x - y - z = 0$ mentre un'equazione cartesiana per W è $2x - y - z = 0$. Un sistema di equazioni cartesiane per $U \cap W$ è pertanto il sistema

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$$

Risolvendolo troviamo

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

per cui una base di $U \cap W$ è data ad esempio dal vettore

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

corrspondente alla scelta $\lambda = 1$. Chiaramente ogni scelta di $\lambda \neq 0$ va bene. Ad esempio il vettore trovato in precedenza corrisponde alla scelta $\lambda = -1$.