Dalla formula di duplicazione del coseno,

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\mathrm{sen}^2(x),$$

prendendo $x = \alpha/2$ troviamo

$$\cos(\alpha) = 2\cos^2(\alpha/2) - 1 = 1 - 2\mathrm{sen}^2(\alpha/2)$$

Da cui, se α è compreso tra 0 e π (cosicché $\cos(\alpha/2)$ e $\mathrm{sen}(\alpha/2)$ sono positivi), si ricava

$$\cos(\alpha/2) = \sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$$

$$\mathrm{sen}(\alpha/2) = \sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$$

Adesso, se prendiamo $\alpha = \mathrm{arctg}(t)$, con $t \geq 0$, troviamo

$$\cos\left(\frac{\mathrm{arctg}(t)}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos(\mathrm{arctg}(t))}{2}}$$

$$\mathrm{sen}\left(\frac{\mathrm{arctg}(t)}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos(\mathrm{arctg}(t))}{2}}$$

Una semplice proporzione mostra che

$$\cos(\mathrm{arctg}(t)) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

e quindi finalmente troviamo

$$\cos\left(\frac{\mathrm{arctg}(t)}{2}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{1+t^2}+1}{2\sqrt{1+t^2}}}$$

$$\mathrm{sen}\left(\frac{\mathrm{arctg}(t)}{2}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{1+t^2}-1}{2\sqrt{1+t^2}}}$$

Possiamo adesso rendere più esplicita l'espressione per le radici quadrate di $1+2i$ vista a lezione. Le radici di $1+2i$ che avevamo trovato erano date da $\{z, -z\}$ con

$$z = 5^{1/4}\left(\cos\left(\frac{\mathrm{arctg}(2)}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\mathrm{arctg}(2)}{2}\right)\right)$$

Se proprio ci stanno antipatici seni, coseni e arcotangenti, possiamo adesso riscrivere questa espressione come

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{5}+1} + i\sqrt{\sqrt{5}-1}\right)$$